

# IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA  
SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. VIII, N. 12

Serie nona

1 Dicembre 1951

## Cattura $K$ del mesone $\mu$ .

P. BUDINI

*Istituto di Fisica dell'Università - Trieste*

(ricevuto l'8 Agosto 1951)

**Riassunto.** — Si studia il problema della cattura di un mesone  $\mu$  negativo legato in un'orbita  $K$  assumendo che esso interagisca con i protoni del nucleo tramite un campo mesonico pseudoscalare e prendendo in considerazione il solo termine pseudoscalare dell'hamiltoniano d'interazione. Si trova che, contrariamente a quanto era stato previsto, non è da aspettarsi una dipendenza del tempo di cattura da  $Z^{-n}$  con  $n$  maggiore di 4. Si accenna alla diversità che le interazioni scalari e pseudoscalari comportano nel problema dell'eccitazione del nucleo.

### Introduzione.

Il processo della cattura di un mesone negativo legato in un'orbita  $K$  è pensato come particella di Fermi-Dirac:

$$(1) \quad P + \mu^- \rightarrow N + \mu^0,$$

si può descrivere, in modo equivalente, sia mediante una interazione diretta, alla Fermi, che tramite un campo pionico. Il problema è stato trattato <sup>(1)</sup> in ambedue i casi e con l'adozione di una interazione, rispettivamente un campo, scalari.

Il risultato principale è che la probabilità di transizione è, in prima approssimazione, proporzionale a  $Z^4$  e che per mettere in accordo i risultati teorici con i dati sperimentali è necessario assumere una costante di accoppiamento « alla Fermi », per il processo (1), che è dello stesso ordine di quella del decadimento.

<sup>(1)</sup> C. MARTY e J. PRENTKI: *Journ. de Phys.*, **9**, 147 (1948); G. PUPPI: *Nuovo Cimento*, **6**, 194 (1949); J. TIOMNO e J. A. WHEELER: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 153 (1949).

mento  $\beta$  del mesone  $\mu$  e del nucleone. In particolare J. A. WHEELER <sup>(2)</sup> osserva che se si adottasse un campo pionico pseudoscalare la probabilità di transizione potrebbe risultare proporzionale a  $Z^6$  anziché a  $Z^4$ , nel qual caso l'osservazione sperimentale potrebbe dare un'indicazione sull'interazione da ritenersi la più corretta, tra la scalare e la pseudoscalare. Questo è il punto che ci siamo proposti di chiarire nel presente lavoro.

### L'elemento di matrice.

Il processo (1) che, nelle nostre ipotesi, si scriverà:

$$(2) \quad P + \mu^- \left\langle \begin{array}{l} \Pi^+ + N + \mu^- \\ \Pi^- + P + \mu^0 \end{array} \right\rangle \mu^0 + N,$$

è trattabile col procedimento semiclassico di BETHE e NORDHEIM <sup>(3)</sup> qualora gli elementi di matrice del primo ordine ammettano un'approssimazione statica diversa da zero; ora, in base a quanto è stato recentemente dimostrato <sup>(4)</sup>, questo non è il nostro caso <sup>(5)</sup>. Cercheremo quindi di seguire la via quantistica corretta.

Assumeremo <sup>(4)</sup> <sup>(6)</sup>

$$(3) \quad H' = -g_2 \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k}} \int \Phi_N^* \beta \gamma^{(5)} \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \Phi_P d\tau$$

come elemento di matrice per l'emissione di un pione positivo o l'assorbimento di un pione negativo di impulso  $\hbar\mathbf{k}$  da parte di un nucleone di autofunzioni  $\Phi_P$  e  $\Phi_N$  rispettivamente prima e dopo il processo; e analoga espressione varrà per il mesone-neutretto. L'elemento di matrice del II ordine per il processo (1) si potrà scrivere (vedi Appendice):

$$(4) \quad H_{AF}'' = - \sum_k \frac{4\pi\hbar^2 c^2 g_1 g_2}{(\hbar\omega_k)^2 - (E_N - E_P)^2} \int \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \times \\ \times \Phi_N^* \beta \gamma^{(5)} \Phi_P \Phi_0^* \beta \gamma^{(5)} \Phi_- d\tau_1 d\tau_2.$$

Osserviamo incidentalmente che qualora si assumano onde piane a rappre-

<sup>(2)</sup> J. A. WHEELER: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 133 (1949).

<sup>(3)</sup> H. A. BETHE e L. W. NORDHEIM: *Phys. Rev.*, **57**, 998 (1940).

<sup>(4)</sup> F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **73**, 929 (1948); L. VAN HOVE: *Phys. Rev.*, **75**, 1518 (1949).

<sup>(5)</sup> L. LOPES: *Phys. Rev.*, **74**, 1723 (1948). Tratta il processo 1) con un campo pionico pseudoscalare in approssimazione statica che deve ritenersi non adatta in base a quanto dimostrato nei lavori della citazione <sup>(4)</sup>.

<sup>(6)</sup> Vedi, per es., G. WENTZEL: *Quantum Theory of Fields* (New York, 1949).



sentare le quattro funzioni d'onda nella (4) questa si riduce immediatamente all'elemento di matrice per onde piane ricavato da L. VAN HOVE (4). Ora, tenendo presente che  $E_N - E_P$  è indipendente da  $k$ , scriviamo:

$$(5) \quad c^{-2} \hbar^{-2} [(\hbar \omega_k)^2 - (E_N - E_P)^2] = \kappa_0^2 + k^2 - \kappa'^2 = \kappa_1^2 + k^2,$$

dove:  $\kappa_0$  è l'inverso del raggio d'azione delle forze nucleari,

$$\kappa' = (E_N - E_P)/(\hbar c),$$

e

$$\kappa_1^2 = \kappa_0^2 - \kappa'^2.$$

Allora la somma degli stati intermedi nella (4) si esegue facilmente (6) e si ottiene:

$$(6) \quad H_{AF}'' = -g_1 g_2 \int \frac{\exp[-\kappa_1 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \Phi_N^* \beta \gamma^{(5)} \Phi_P \Phi_0^* \beta \gamma^{(5)} \Phi_- d\tau_1 d\tau_2,$$

nel nostro caso particolare  $(E_N - E_P)/(\hbar \omega_k) \lesssim 0,1$  di modo che risulta:  $(\kappa_0 - \kappa_1)/\kappa_0 \lesssim 0,01$ ; ora siccome adotteremo funzioni d'onda piane per  $\Phi_N$  e  $\Phi_P$ , potremo considerare quest'ultime lentamente variabili nel tratto  $1/\kappa_1$  di modo che la (6) si potrà scrivere:

$$(7) \quad H_{AF}'' = -\frac{4\pi}{\kappa_1^2} g_1 g_2 \int \Phi_N^* \beta \gamma^{(5)} \Phi_P \Phi_0^* \beta \gamma^{(5)} \Phi_- d\tau,$$

che è del tipo dell'interazione pseudoscalare «alla Fermi» con costante d'interazione

$$G = \frac{4\pi}{\kappa_1^2} g_1 g_2.$$

Convieni ora porre:

$$(8) \quad \Phi = \begin{vmatrix} \varphi \\ \delta \end{vmatrix},$$

dove  $\varphi$  e  $\delta$  sono autofunzioni di Pauli, di modo che la (7) diventa:

$$(9) \quad H_{AF}'' = G \int (\varphi_N^* \delta_P - \delta_N^* \varphi_P) (\varphi_0^* \delta_- - \delta_0^* \varphi_-) d\tau.$$

Nell'approssimazione non relativistica, valida per il  $\mu^-$  e per i nucleoni entro il nucleo, è noto che si può porre:

$$(10) \quad \delta = \frac{\hbar}{2imc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi,$$

porremo inoltre:

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi_P = S_P V^{-1/2} \exp [i(\mathbf{p}_P \cdot \mathbf{r})/\hbar] \\ \varphi_- = S_- Z^{3/2} (\pi a_0^3)^{-1/2} \exp [-Zr/a_0] \\ \Phi_0(s) = u(s) V^{-1/2} \exp [i(\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r})/\hbar], \end{cases}$$

dove  $S$  indica le autofunzioni di spin e per gli altri simboli il significato è ovvio. Sostituendo nella (9) e tenendo conto della (10) si ottiene facilmente:

$$(12) \quad H'_{AF} = -G \frac{Z^{3/2} [(\mathbf{p}_P - \mathbf{p}_N) \cdot (\mathbf{S}_N \boldsymbol{\sigma} S_P)]}{2McV^{3/2} \sqrt{\pi a_0^3}} \int \exp i[(\mathbf{p}_P - \mathbf{p}_N + \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{r}] - Zr/a_0 \times \\ \times \left[ \frac{Ze^2}{2i\hbar c} |u^*(1)u^*(2)| (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}/r) S_- + u^*(3)u^*(4) |S_-| \right] d\mathbf{r},$$

dove  $M$  è la massa del nucleone.

### Somma sugli spin e dipendenza da $Z$ .

La  $H^2$  da introdurre nel calcolo della probabilità di transizione si ottiene dalla (12) secondo la

$$(13) \quad H^2 = \frac{1}{4} \mathfrak{S}_N \mathfrak{S}_P \mathfrak{S}_- \mathfrak{S}_0 |H'_{AF}|^2,$$

dove le  $\mathfrak{S}$  indicano somme sugli stati di spin delle singole particelle. Per la (8) e per la (10) la somma sugli stati di spin per i nucleoni equivale alla somma su tutti gli stati possibili di modo che si ha:

$$\frac{1}{2} \mathfrak{S}_N \mathfrak{S}_P [S_P^* (\mathbf{p}_P - \mathbf{p}_N) \cdot \boldsymbol{\sigma} S_N] [S_N^* (\mathbf{p}_P - \mathbf{p}_N) \cdot \boldsymbol{\sigma} S_P] = \\ = \frac{1}{2} \text{traccia} [(\mathbf{p}_P - \mathbf{p}_N) \cdot \boldsymbol{\sigma}]^2 = (\mathbf{p}_P - \mathbf{p}_N)^2.$$

La somma sul secondo termine della (12) dà

$$\frac{1}{2} \mathfrak{S}_- \mathfrak{S}_0 |u^*(3)u^*(4) |S_-|^2 = \frac{c^2 p_0^2}{(\mu_0 c^2 + E_0)^2 + c^2 p_0^2},$$

che si avvicina al valore massimo  $1/2$  per  $\mu_0 c^2 \ll E_0$  (rigorosamente se il neu-

tretto è un neutrino). Di modo che la (13) si può scrivere:

$$(14) \quad H^2 = G^2 \frac{Z^3 (\mathbf{p}_N - \mathbf{p}_P)^2}{8 M^2 c^2 V^2 \pi a_0^3} \left\{ \frac{Z^2}{4} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{1}{2} \times \right. \\ \times \mathfrak{E}_0 \mathfrak{E}_- \left| \int \exp [i[(\mathbf{p}_P - \mathbf{p}_N - \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{r}] - Zr/a_0] |u^*(1)u^*(2)| (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}/r) S_- d\tau \right|^2 + \\ \left. + \frac{c^2 p_0^2}{(\mu_0 c^2 + E_0)^2 + c^2 p_0^2} \left| \int \exp [i[(\mathbf{p}_P - \mathbf{p}_N - \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{r}] - Zr/a_0] d\tau \right|^2 \right\}.$$

Come si vede il primo termine della (14) è proporzionale a  $Z^5$ ; e il suo predominare sul secondo termine, il che comporterebbe in ogni caso l'assumere grande la massa del neutretto ( $\gtrsim 100 m_e$ ), porterebbe alla dipendenza della probabilità di transizione da  $Z^6$  prevista dal WHEELER. Senonchè, se ammettiamo che l'autofunzione del  $\mu_-$  nel livello fondamentale presenti simmetria sferica basta sviluppare l'operatore contenuto nell'integrale del primo termine della (14) per accorgersi che esso si riduce ad una somma di integrali del tipo

$$\int f(r) \cos \theta \sin \theta dr d\theta d\varphi,$$

identicamente nulli. Questo risultato era prevedibile in quanto, per la (10), ricordando come è stata dedotta la (14), si capisce che il primo membro di quest'ultima è proporzionale al quadrato del valore medio dell'impulso (vettore) del  $\mu_-$  nel livello  $K$  che è appunto nullo.

In conclusione, nelle nostre ipotesi, la probabilità di transizione del processo (1) sarà proporzionale a  $Z^n$  con  $n$  sensibilmente maggiore di 4 solo nell'ipotesi che l'autofunzione del  $\mu_-$  nel livello fondamentale presenti una decisa deviazione dalla simmetria sferica e che la massa del neutretto sia dell'ordine di un centinaio di masse elettroniche. Ipotesi estremamente poco attendibili che noi nel seguito scarteremo, il che equivale a trascurare il primo membro della (14).

### Eccitazione del nucleo e costanti d'accoppiamento.

J. TIOMMO e J. A. WHEELER <sup>(1)</sup> hanno calcolato la probabilità di transizione del processo (1) in funzione dell'energia  $Q$  che, dopo il processo, rimane al nucleo, adottando un'interazione scalare. Riferiremo brevemente a quali cambiamenti porti l'adozione di un'interazione tramite campo pseudoscalare. Ci manterremo pertanto aderenti al procedimento seguito dai citati autori nel caso del modello nucleare a particelle libere.

L'integrale che compare nella (14) andrà, naturalmente, esteso al volume occupato dal nucleo; ed entro tale volume la autofunzione del  $\mu_-$  potrà rite-



nersi costante conformemente a quanto assunto dai citati autori. Si prendono allora in considerazione due casi limite:

a) La lunghezza d'onda del neutretto sia piccola rispetto alle dimensioni del nucleo.

In questo caso l'integrale della (14) è diverso da zero e solamente quando si abbia conservazione dell'impulso tra protone neutrone e neutretto. Allora si vede facilmente che indicate con  $(dA/dQ)_S$  e con  $(dA/dQ)_{PS}$  le probabilità di transizione calcolate con interazione scalare e, rispettivamente, pseudo-scalare si ha:

$$(15) \quad \left(\frac{dA}{dQ}\right)_{PS} = \left(\frac{dA}{dQ}\right)_S \frac{G_{PS}^2}{G_S^2} \frac{p_0^2}{2M^2c^2} \frac{c^2 p_0^2}{(\mu_0 c^2 + E_p)^2 + c^2 p_0^2},$$

dove

$$c^2 p_0^2 = (\mu_0 c^2 - Q)^2 - (\mu_0 c^2)^2,$$

e  $G_{PS}$  e  $G_S$  sono le costanti d'accoppiamento (alla Fermi) rispettivamente pseudoscalare e scalare.

L'andamento delle due probabilità di transizione in funzione di  $Q$  rimane sostanzialmente invariato nei due casi pur venendo leggermente favorite le piccole energie di eccitazione nel caso pseudoscalare come si vede dalla (15).

b) La lunghezza d'onda del neutretto sia grande rispetto alle dimensioni del nucleo.

In questo caso la relazione tra le probabilità di transizione calcolate con i due metodi sarà ancora data dalla (15) salvo che non avendosi più conservazione d'impulso tra nucleone e neutretto si dovrà sostituire  $(\mathbf{p}_N - \mathbf{p}_P)^2$  al posto del  $p_0^2$  che compare nel terzo fattore del secondo membro della (15). Ciò fa sì che la probabilità di transizione pseudoscalare rimane finita, diversa da zero per  $Q \rightarrow 0$ , contrariamente a quanto avviene nel caso scalare in cui diverge <sup>(1)</sup>.

La costante di accoppiamento  $G_{PS}$  da introdursi nella (15) per render ragione dei tempi di cattura osservati sperimentalmente è, soprattutto per la presenza del fattore  $(\mathbf{p}_N - \mathbf{p}_P)^2 / (Mc)^2$ , più grande di quella necessaria nel caso scalare di modo che non sussiste più la rilevata <sup>(1)</sup> uguaglianza con le costanti d'accoppiamento (scalari) per il decadimento  $\beta$  e per il decadimento del mesone  $\mu$ . Tuttavia è da rilevare che l'uguaglianza sussiste ancora se tutti i processi sono calcolati con l'accoppiamento pseudoscalare e se si assume piccola la massa del neutretto rispetto a quella del mesone.

## APPENDICE

Ci proponiamo di dedurre la (4); a tal fine pensiamo le  $g$  come matrici <sup>(6)</sup> operanti sullo spin isotopico e precisamente  $\bar{g}_1$  e  $\bar{g}_1^*$  abbiano elementi non nulli per la transizione  $\mu^- \rightarrow \mu^0$  e rispettivamente l'inversa, e  $\bar{g}_2$  e  $\bar{g}_2^*$  per la  $N \rightarrow P$  e l'inversa. Allora indicando con l'indice 1 coordinate ed autofunzioni del mesone  $\mu$  e con l'indice 2 quelle del nucleone abbiamo:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} H_{AI} &= -\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k}} \int \Phi_1^* \bar{g}_1 \beta_1 \gamma_1^{(5)} \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1] \Phi_1 d\tau_1 \dots (\mu^- \rightarrow \mu^0 + \Pi^-) \\ H_{IF} &= -\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k}} \int \Phi_2^* \bar{g}_2^* \beta_2 \gamma_2^{(5)} \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2] \Phi_2 d\tau_2 \dots (P + \Pi^- \rightarrow N) \\ H_{AII} &= -\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k}} \int \Phi_2^* \bar{g}_2^* \beta_2 \gamma_2^{(5)} \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2] \Phi_2 d\tau_2 \dots (P \rightarrow N + \Pi^+) \\ H_{IIF} &= -\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k}} \int \Phi_1^* \bar{g}_1 \beta_1 \gamma_1^{(5)} \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1] \Phi_1 d\tau_1 \dots (\mu^- + \Pi^+ \rightarrow \mu^0). \end{aligned} \right.$$

Dove gli stati intermedi virtuali I e II sono quelli indicati nella prima e seconda riga della trasformazione 2).

Tenuto conto che per il principio di conservazione dell'energia si deve avere:

$$E_N - E_P = E^- - E^0 = \Delta E,$$

si ha che

$$(17) \quad H'_{AF} = - \left\{ \sum_I \frac{H_{AI} H_{IF}}{E_I - E_A} + \sum_{II} \frac{H_{AII} H_{IIF}}{E_{II} - E_A} \right\} =$$

$$= - \sum_k \frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k} \iint \Phi_1^* \Phi_2^* \bar{g}_1 \bar{g}_2^* \beta_1 \beta_2 \gamma_1^{(5)} \gamma_2^{(5)} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \times$$

$$\times \Phi_1 \Phi_2 d\tau_1 d\tau_2 \left[ \frac{1}{\hbar\omega_k - \Delta E} + \frac{1}{\hbar\omega_k + \Delta E} \right] = - \sum_k \frac{4\pi\hbar^2 c^2}{(\hbar\omega_k)^2 - (\Delta E)^2} \times$$

$$\times \iint \Phi_1^* \Phi_2^* \bar{g}_1 \bar{g}_2^* \beta_1 \beta_2 \gamma_1^{(5)} \gamma_2^{(5)} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \Phi_1 \Phi_2 d\tau_1 d\tau_2,$$

dove appunto la matrice  $\bar{g}_1 \bar{g}^*$  ha un elemento diverso da zero solo per la transizione (1), e quindi vale la (4) con  $g_1$  e  $g_2$  fattori numerici.

Ringrazio il prof. BRUNO FERRETTI per avermi proposto l'argomento del presente lavoro e per le numerose e proficue discussioni cui la trattazione del problema diede lo spunto. Ringrazio inoltre il prof. EDOARDO AMALDI per la gentile ospitalità offertami presso l'Istituto di Fisica dell'Università di Roma.

Questo lavoro è stato eseguito col concorso di una borsa di studio offerta dall'Unione Industriali di Como.

---

#### SUMMARY

The reaction of negatively charged mesons with atomic nuclei is examined on the hypothesis that the process involved is the transition (2) of the text with pseudoscalar mesons: only the pseudoscalar term of the interaction is considered. Contrarily to what had been foreseen, the probability of the reaction is, in this case also, proportional, for the lightest nuclei, to the fourth power of the atomic number. The influence of the pseudoscalar theory on the problem of nuclear excitation is studied.



## Sul problema della generazione dei mesoni e l'effetto di latitudine (II).

M. FERRETTI SFORZINI

*Centro di Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma*

(ricevuto l'8 Agosto 1951)

**Riassunto.** — Usando la funzione  $A(W, E, \lambda)$  ricavata nel precedente lavoro sul medesimo argomento, e calcolando la funzione  $F(W, E)$  di generazione dei mesoni nella ipotesi della produzione multipla di Heisenberg, secondo cui lo spettro energetico dei mesoni nel sistema del baricentro è rappresentato da una legge di potenza, si risale al calcolo della intensità totale relativa alla radiazione mesonica in funzione della latitudine. Dal confronto dei dati così ottenuti con quelli sperimentali si può determinare il valore numerico dell'esponente della legge di potenza dello spettro, che risulta uguale a circa 3.

In un precedente lavoro <sup>(1)</sup> si è calcolata la funzione  $A(W, \lambda, E)$  che determina il numero di mesoni che arrivano al livello del mare alla latitudine  $\lambda$  essendo stati generati con energia  $E$  da un nucleone di energia  $W$ , e provenienti da tutte le direzioni. Lo scopo di tale calcolo era quello di procurarci un mezzo che ci permettesse di fare un confronto tra le varie teorie di generazione dei mesoni che sono state via via proposte <sup>(2)</sup> <sup>(3)</sup> <sup>(4)</sup> <sup>(5)</sup>, e i dati sperimentali sugli effetti geomagnetici, in particolare sull'effetto di latitudine.

Nel presente lavoro i risultati ottenuti in quello precedente sono stati applicati alla teoria di produzione di Heisenberg. Le notazioni usate sono le stesse qui che in <sup>(1)</sup>.

Come prima cosa, poichè già si possiede una espressione per la funzione  $A$ , è ora necessario calcolare la funzione di generazione  $F(E, W)$ . Indicando con  $f(E_0)$  il numero di mesoni che vengono generati nel sistema del baricentro,

<sup>(1)</sup> M. FERRETTI SFORZINI: *Nuovo Cimento*, **7**, 196 (1950).

<sup>(2)</sup> G. WATAGHIN: *Phys. Rev.*, **74**, 975 (1948).

<sup>(3)</sup> W. HEISENBERG: *Zeits. f. Phys.* **126**, 569 (1949); *Nature* (luglio 1949).

<sup>(4)</sup> W. HEITLER e L. JANOSSY: *Proc. Phys. Soc.*, A **42**, 374 (1949).

<sup>(5)</sup> E. FERMI: *Progr. in Theor. Phys.*, **5**, 770 (1950).

questa volta conviene per comodità di calcolo porre

$$(1) \quad f(E_0) = \int_{\mu c^2}^{\infty} f(\bar{E}_0) \delta(\bar{E}_0 - E_0) d\bar{E}_0,$$

dove  $E_0$  è la energia dei mesoni nel sistema del baricentro, e  $\mu c^2$  è la massa di riposo del mesone.

Il numero di mesoni nel sistema dell'osservatore è allora

$$(2) \quad F(E) = \frac{1}{2} \int f(E_0(E, \xi)) \cdot J \cdot d\xi = \frac{1}{2} \int d\xi \cdot J \int_{\mu c^2}^{\infty} f(\bar{E}_0) \delta(\bar{E}_0 - E_0'(E, \xi)) d\bar{E}_0.$$

dove  $J$  è il jacobiano della trasformazione e  $\xi$  il coseno dell'angolo entro il quale vengono emessi i mesoni nel sistema dell'osservatore. Invertendo l'ordine di integrazione si ha:

$$(3) \quad F(E) = \frac{1}{2} \int_{\mu c^2}^{\infty} f(\bar{E}_0) d\bar{E}_0 \int_{-1}^{+1} d\xi \cdot J \cdot \delta(\bar{E}_0 - E_0(E, \xi)).$$

Le espressioni esatte del jacobiano e di  $E_0$  come funzione di  $E$  e di  $\xi$  pur essendo facilmente calcolabili sono alquanto complicate e renderebbero penoso il calcolo dell'integrale. Si può tuttavia facilmente verificare, avendo espresso la  $f(E_0)$  con la (1) ed essendo ricorsi all'artificio della inversione dell'ordine di integrazione, che si possono usare nella (3) le espressioni approssimate già usate nel lavoro precedente senza errori molto notevoli.

Utilizzando il risultato ottenuto nella equazione (8) del suddetto lavoro si può scrivere

$$(4) \quad F(E) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{\beta_0} \int_{\bar{E}_0 \min}^{\bar{E}_0 \max} F(\bar{E}_0) \frac{d\bar{E}_0}{\bar{E}_0},$$

con i valori di  $\bar{E}_0 \max$  e di  $\bar{E}_0 \min$  dati da

$$(5) \quad \begin{cases} \bar{E}_0 \max = \frac{E(1 + \beta_0)}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \\ \bar{E}_0 \min = \frac{E(1 - \beta_0)}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \end{cases}$$

Poniamo ora, in luogo di  $f(E_0)$  l'espressione che si ricava dalla ipotesi di

Heisenberg

$$(6) \quad \frac{dn}{dE_0} = f(E_0) = \frac{a}{E_0^\alpha}.$$

Si ha

$$F(E) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{\beta_0} \int_{E_{0\min}}^{\overline{E_{0\max}}} \frac{a}{E_0^\alpha} \cdot \frac{dE_0}{E_0}.$$

Eseguendo l'integrazione e trascurando il termine relativo al limite superiore dell'integrale, come se esso fosse infinito, si ottiene:

$$(7) \quad F(E) = \begin{cases} \frac{a}{2} \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{\beta_0} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{(\mu c^2)^\alpha} & \text{per } E \leq \mu c^2 \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{1-\beta_0} \\ \frac{a}{2} \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{\beta_0} \cdot \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{1-\beta_0} \right)^\alpha \cdot \frac{1}{E^\alpha} & \text{per } E > \mu c^2 \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{1-\beta_0} \end{cases}$$

Per determinare la costante «  $a$  » ricordiamo che l'energia totale disponibile nel sistema del baricentro è <sup>(1)</sup>

$$W_0 = 2 \left[ \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} - Mc^2 \right] = \sqrt{2W+4} - 2,$$

dove si è posto  $Mc^2 = 1$  e dove  $W$  è la energia cinetica del protone nel sistema dell'osservatore.

Poichè sarà

$$W_0 = \int_{\mu_0 c^2}^{W_0} a_1 \frac{dE_0}{E_0^{\alpha-1}},$$

si ottiene

$$(8) \quad \begin{cases} a = \frac{W_0(2-\alpha)}{W_0^{2-\alpha} - (\mu_0 c^2)^{2-\alpha}} & \text{per } \alpha \neq 2 \\ a = \frac{W_0}{\log \frac{W_0}{\mu_0 c^2}} & \text{per } \alpha = 2. \end{cases}$$



In genere allora si ha

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} F(E) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{W_0(2-\alpha)}{W_0^{2-\alpha} - (\mu_0 c^2)^{2-\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{\beta_0} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{(\mu_0 c^2)^\alpha} & \text{per } E \leq \mu_0 c^2 \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{1-\beta_0} \text{ e } \alpha \neq 2, \\ \frac{1}{2} \frac{W_0(2-\alpha)}{W_0^{2-\alpha} - (\mu_0 c^2)^2} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{\beta_0} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{1-\beta_0} \right)^\alpha \cdot \frac{1}{E^\alpha} & \text{per } E > \mu_0 c^2 \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{1-\beta_0} \text{ e } \alpha \neq 2, \end{cases} \\ F(E) &= \begin{cases} \frac{W_0}{2 \log \frac{\mu_0 c^2}{W_0}} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{\beta_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\mu_0 c^2)^2} & \text{per } E \leq \mu_0 c^2 \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{1-\beta_0} \text{ e } \alpha = 2, \\ \frac{W_0}{2 \log \frac{W_0}{\mu_0 c^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{\beta_0} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{1-\beta_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{E^2} & \text{per } E > \mu_0 c^2 \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{1-\beta_0} \text{ e } \alpha = 2. \end{cases} \end{aligned} \right.$$

In particolare, ponendo  $\alpha = 1$ , e trascurando quando è possibile il termine  $1 - \beta_0^2$  in confronto all'unità, si ottiene:

$$(10) \quad F(E) \cong \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2W}} \cdot \frac{1}{\mu_0 c^2} & \text{per } E \leq \mu_0 c^2 \sqrt{2W} = 0,13 \sqrt{2W}, \\ \frac{1}{E} & \text{per } E > \mu_0 c^2 \sqrt{2W} = 0,13 \sqrt{2W}, \end{cases}$$

per  $\alpha = 3$  si ha invece:

$$(10bis) \quad F(E) \cong \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2W} - 2}{(0,13)^2 \sqrt{2W}} & \text{per } E \leq 0,13 \sqrt{2W}, \\ \frac{0,13}{3} (\sqrt{2W} - 2) 2W \cdot \frac{1}{E^3} & \text{per } E > 0,13 \sqrt{2W}. \end{cases}$$

Dobbiamo ora effettuare

$$I(\lambda) = \int_{0,13 \sqrt{2W}}^{\infty} dE \int_{\dot{E}}^{\infty} F \cdot G \cdot A dW,$$

dove  $G$  è il numero dei mesoni primari che si hanno indipendentemente dall'effetto di latitudine. Assumendo  $G(W) = G_0 W^{2,6}$ , e normalizzando a  $G_0 = 1$  si è calcolata anche questa volta numericamente la funzione  $G(W) \cdot A(W, E, \lambda)$ .

Con artifici di calcolo simili a quelli usati in <sup>(1)</sup> si è portato fino in fondo il calcolo numerico dell'integrale  $I(\lambda)$  nel caso di  $\alpha = 3$ . I valori numerici ottenuti sono:

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= 0,008\,026 && \text{per } \lambda = 0^\circ \\ I(\lambda) &= 0,008\,480 && \text{per } \lambda = 30^\circ. \end{aligned}$$

L'accordo con l'esperienza può ritenersi buono, essendo la differenza percentuale calcolata uguale a 5,6% e quella sperimentale uguale a 5,3%.

Per controllare la sensibilità del metodo il calcolo è stato ripetuto nel caso di  $\alpha = 1$ . I risultati ottenuti danno:

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= 0,00823 && \text{per } \lambda = 0^\circ \\ I(\lambda) &= 0,01191 && \text{per } \lambda = 30^\circ. \end{aligned}$$

La differenza percentuale è in questo caso dell'ordine del 30%. Per  $\alpha \rightarrow \infty$  non si otterrebbe effetto di latitudine.

Abbiamo quindi tre punti per rappresentare graficamente la variazione dell'effetto percentuale in funzione di  $1/\alpha$ . Se ne può dedurre che il valore di  $\alpha$  che dà risultati in accordo con quelli sperimentali per quanto riguarda l'effetto di latitudine viene col presente metodo determinato entro qualche per cento.

Notiamo che il valore di  $\alpha = 3$  che abbiamo trovato è alquanto più elevato di quello che l'Autore della teoria riteneva probabile e pertanto (come è facile inferire dalla equazione (6) e dalla (8)) il difetto massimo della teoria di Heisenberg di prevedere molteplicità troppo elevate alle alte energie (cfr. per esempio, discussione nel citato lavoro di FERMI) <sup>(5)</sup> viene aggravato (infatti il numero di particelle è una funzione crescente di  $\alpha$ ).

Questo risultato sta anche ad indicare, probabilmente, che la emissione di mesoni aventi nel sistema del baricentro una energia paragonabile a tutta quella disponibile, è, almeno alle energie che interessano l'effetto di latitudine, un fatto poco probabile, benchè sia più probabile qui di quanto risulterebbe dalla teoria discussa nel precedente lavoro <sup>(1)</sup>.

Sembra pertanto che almeno da un punto di vista qualitativo sia possibile sperare che le previsioni della teoria di Fermi siano in buon accordo con i risultati sperimentali relativi all'effetto di latitudine.

## SUMMARY

Using the results obtained in a previous paper for the determination of the number  $\cdot 1(W, E, \lambda)$  of mesons which arrive at sea-level from all possible directions, and which have been generated with an energy  $E$  by a nucleon of energy  $W$  at a latitude  $\lambda$ , the total intensity of mesons radiation at sea-level has been calculated as a function of the latitude, using the Heisenberg hypothesis of production. The results of calculation are compared with the experimental data.

## Teoria delle linee di ritardo "compensate" (\*).

R. ASCOLI

*Istituto di Fisica sperimentale del Politecnico - Torino*

(ricevuto il 10 Agosto 1951)

**Riassunto.** — Si svolge una teoria della « compensazione » delle linee di ritardo a costanti distribuite, supponendo uniforme la distribuzione dei parametri. Dallo studio delle equazioni di propagazione che si ottengono si conclude che è possibile determinare una capacità di compensazione che mantenga il ritardo costante in una gamma di frequenze prefissata. Si sviluppano i calcoli nel caso di capacità di compensazione ottenuta con rettangoli conduttori e si ricava un grafico mediante il quale il progetto è immediato. La concordanza con i dati costruttivi delle linee ottenute per tentativi dal KALLMANN e da altri è buona. Si mostra infine come la teoria possa suggerire artifici per estendere maggiormente il campo di frequenze in cui il ritardo si mantiene costante.

### 1. — Introduzione.

Prima di affrontare il problema della « compensazione » delle linee di ritardo, richiamiamo qui i risultati degli studi finora compiuti sulle linee artificiali a parametri distribuiti, perchè ad essi ci riferiremo nella teoria da noi svolta.

È noto che tali linee sono costituite da un solenoide lungo il quale una striscia conduttrice realizza una capacità distribuita delle singole spire verso la striscia stessa. Il sistema funziona in modo analogo ad una linea elettrica a un solo filo con ritorno a terra. L'analogia però sussiste solo per onde la cui lunghezza  $\lambda$  sia assai maggiore del diametro  $D$  del solenoide; infatti in generale le spire concatenate col flusso prodotto in una sezione della linea non sono percorse da correnti in fase con quelle che percorrono tale sezione, e quindi

---

(\*) Lavoro svolto presso la Sezione Radiofisica dell'I.E.N.G.F., Torino.



non è più valida la ordinaria trattazione per dedurre l'induttanza del solenoide: precisamente al diminuire di  $\lambda$  i contributi recati al flusso dalle singole spire divengono sempre più discordi, e l'induttanza apparente diminuisce.

Il problema è stato risolto in modo quantitativo da H. PORITSKI e M. H. BLEWETT <sup>(1)</sup>, ricorrendo direttamente alle equazioni di Maxwell, con opportune condizioni al contorno. Supposto che il solenoide sia percorso da onde sinusoidali di corrente, si conclude che l'induttanza per unità di lunghezza ha il valore:

$$(1) \quad l\left(\pi \frac{D}{\lambda}\right) = \pi \mu_0 n^2 \frac{D^2}{2} I_1\left(\pi \frac{D}{\lambda}\right) K_1\left(\pi \frac{D}{\lambda}\right),$$

ove  $n$  è il numero di spire per unità di lunghezza,  $\mu_0$  la permeabilità magnetica del mezzo,  $I_1$  e  $K_1$  sono le funzioni di Bessel modificate di 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> specie.

(L'induttanza per unità di lunghezza e per onde di lunghezza  $\lambda$  (o pulsazione  $\omega = 2\pi D/\lambda$ ) è definita da:  $l[\pi D/\lambda] = -[e/(di/dt)]_\omega$  in cui  $e$  è la f.e.m. indotta dalla corrente  $i$  per unità di lunghezza del solenoide e l'espressione si intende calcolata nel caso che si propaghino onde sinusoidali di pulsazione  $\omega$ ).

Chiamate rispettivamente  $c$  ed  $r$  capacità e resistenza per unità di lunghezza,  $\tau$ ,  $Z$ ,  $\alpha$  ritardo, impedenza caratteristica e attenuazione della linea per onde di lunghezza  $\lambda$ ;  $\tau_0$ ,  $Z_0$ ,  $\alpha_0$  le stesse grandezze per valori molto grandi di  $\lambda$ , ed osservando che quando  $\lambda \rightarrow \infty$  il prodotto  $I_1[\pi D/\lambda] K_1[\pi D/\lambda]$  tende a  $1/2$ , si ha, sostituendo la (1) nelle formule della ordinaria teoria delle linee:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau = \sqrt{lc} = \tau_0 \sqrt{2 I_1\left(\pi \frac{D}{\lambda}\right) K_1\left(\pi \frac{D}{\lambda}\right)}, \\ Z = \sqrt{\frac{l}{c}} = Z_0 \sqrt{2 I_1\left(\pi \frac{D}{\lambda}\right) K_1\left(\pi \frac{D}{\lambda}\right)}, \\ \alpha = \frac{r}{Z} = \alpha_0 \sqrt{2 I_1\left(\pi \frac{D}{\lambda}\right) K_1\left(\pi \frac{D}{\lambda}\right)}, \end{array} \right.$$

supposta trascurabile la conduttanza  $g$  di dispersione, e piccola la resistenza  $r$ .

Dall'andamento delle funzioni di Bessel  $I_1$  e  $K_1$  si vede quindi come, all'aumentare della frequenza, ritardo, impedenza e rapporto  $\rho$  tra tensione di uscita e tensione di entrata diminuiscono. La legge è la stessa per le tre grandezze ed è rappresentata dal grafico 1 di fig. 2.

Nel caso più frequente della trasmissione di impulsi è indispensabile che sia mantenuta entro limiti assai stretti la variazione del ritardo al variare

(<sup>1</sup>) J. H. BLEWETT e J. H. RUBEL: *Proc. I.R.E.*, **35**, 1580 (1947).

della frequenza delle componenti di Fourier in cui può essere scomposto l'impulso, altrimenti esso resta fortemente deformato.

Per rendere costante il ritardo entro una certa gamma di frequenze, sono state costruite linee in cui sul solenoide è applicata, accanto alla striscia conduttrice collegata a massa, un'altra striscia tagliata trasversalmente a distanze uguali, in modo da formare laminette rettangolari non collegate. Mediante tentativi metodici il KALLMANN ha ottenuto linee che presentano variazioni di ritardo inferiori all'1% su notevoli bande di frequenza <sup>(2)</sup>.

## 2. - Studio della propagazione nelle linee uniformemente compensate.

Scopo del presente lavoro è dare una giustificazione teorica dei risultati ottenuti e indicare anche un procedimento di progetto.

Volendo ricavare le equazioni di propagazione, osserviamo anzitutto che occorre qui considerare, al posto dell'ordinaria induttanza, una mutua induttanza tra tutte le coppie di spire, dipendente solamente dalla loro distanza. Precisamente chiameremo  $m(z-x)dzdx$  la mutua induttanza che l'elemento generico di ascissa  $x$  presenta rispetto a quello di ascissa  $z$ . Inoltre occorrerà prendere in considerazione, accanto alla capacità  $c$  distribuita in parallelo, quella posta in serie per la compensazione.

L'introduzione di una capacità distribuita periodica del genere di quella utilizzata dal KALLMANN porta a difficoltà matematiche estreme. È d'altra

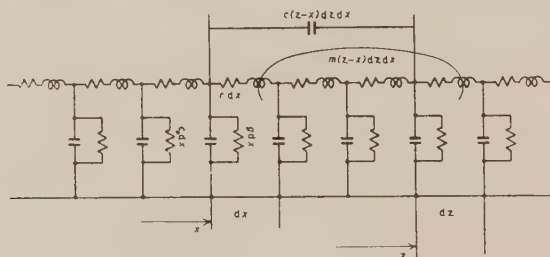


Fig. 1. - Schema di rete equivalente alla linea compensata.

parte intuitivo che solo una capacità distribuita uniformemente come la mutua induttanza può compensare perfettamente quest'ultima. Perciò cominceremo con lo studiare una linea in cui tra gli elementi  $dx$  e  $dz$  di ascisse  $x$  e  $z$  rispettivamente sussista una capacità  $k(z-x)dzdx$ , funzione della sola distanza  $z-x$  tra gli elementi (richiamiamo l'attenzione sul fatto che  $m(z-x)$  e  $k(z-x)$

<sup>(2)</sup> H. E. KALLMANN: *Proc. I.R.E.*, 32, 646 (1946).

rappresenteranno sempre nel seguito simboli di funzione e non prodotti). Una tale capacità si potrebbe realizzare approssimativamente applicando sulla superficie del solenoide foglietti di lamierino conduttore tra loro uguali e sfasati, per esempio ad elica (fig. 3). Lasciamo per ora indeterminata la forma di tali foglietti.

Le equazioni della linea si ricavano facilmente dalle ipotesi fatte, schematizzate in fig. 1:

$$(3) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = ri(x, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} m(z-x) \frac{\partial}{\partial t} i(z, t) dz \\ -\frac{\partial}{\partial x} i(x, t) = gv(x, t) + c_0 \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} k(z-x) \frac{\partial}{\partial t} [v(x, t) - v(z, t)] dz. \end{cases}$$

È utile trasformare la seconda nel modo seguente:

$$-\frac{\partial}{\partial x} i(x, t) = gv(x, t) + \left[ c_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} k(z) dz \right] \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) - \int_{-\infty}^{+\infty} k(z-x) \frac{\partial}{\partial t} v(z, t) dz.$$

Studiamo ora il fenomeno di propagazione in regime sinusoidale di pulsazione  $\omega$ , ponendo:

$$(4) \quad i = I \exp [j\omega(t - z/u)], \quad v = V \exp [j\omega(t - z/u)], \quad \omega = 2\pi u/\lambda,$$

(dove  $u$  è la velocità di propagazione) e osserviamo che le funzioni incognite possono in tal caso essere portate fuori del segno di integrale; per l'integrale della prima equazione si ha allora:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} m(z-x) \frac{\partial}{\partial t} i(z, t) dz &= j\omega I \int_{-\infty}^{+\infty} m(z-x) \exp [j\omega(t - z/u)] dz = \\ &= j\omega I \exp [j\omega(t - x/u)] \int_{-\infty}^{+\infty} m(w) \exp [-j(\omega/u)w] dw = j\omega il(\omega/u), \end{aligned}$$

avendo posto  $w = z - x$  e:

$$(5) \quad l(\omega/u) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(w) \exp [-j(\omega/u)w] dw.$$

(mostreremo poi che essa si identifica con la  $l$  introdotta nella (1)).

Analogamente, posto:

$$(6) \quad c(\omega/u) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(w) \exp [-j(\omega/u)w] dw,$$



otteniamo per l'integrale della seconda equazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(z-x) \frac{\partial}{\partial t} v(z, t) dz = j\omega c(\omega/u), \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} k(z) dz = c(0).$$

La  $l(\omega/u)$  e la  $c(\omega/u)$  sono quindi i coefficienti di Fourier della  $m(w)$  e della  $k(w)$  rispettivamente).

Il sistema (3) si riduce pertanto a:

$$(7) \quad \begin{cases} j \frac{\omega}{u} V = rI + j\omega l \left( \frac{\omega}{u} \right) I, \\ j \frac{\omega}{u} I = gV + j\omega \left[ c_0 + c(0) - c \left( \frac{\omega}{u} \right) \right] V, \end{cases}$$

che sono le equazioni in regime sinusoidale di una ordinaria linea in cui l'induttanza sia  $l(\omega/u)$  e la capacità  $c_0 + c(0) - c(\omega/u)$ , entrambe funzioni di  $\omega/u = 2\pi/\lambda$ .

Se i parametri dissipativi sono piccoli, la velocità di propagazione  $u$  soddisfa, come è noto, alla:

$$(8) \quad \frac{1}{u^2} = l \left( \frac{\omega}{u} \right) \left[ c_0 + c(0) - c \left( \frac{\omega}{u} \right) \right].$$

Si vede di qui come, nota la  $l(\omega/u)$ , si possa determinare una  $c(\omega/u)$  e quindi una capacità di compensazione  $k(w)$  che renda costante entro certi limiti la  $u$  e quindi il ritardo, al variare della frequenza.

Qualitativamente possiamo spiegare l'effetto delle capacità introdotte in serie osservando che una spira generica si trova collegata capacitivamente con le altre coperte dalla stessa laminetta rettangolare: se queste sono equipotenziali con la prima, cioè se la lunghezza d'onda  $\lambda$  è grande in confronto alla lunghezza delle laminette, le capacità introdotte risultano inefficienti. Viceversa, all'aumentare della frequenza, il potenziale delle spire anzidette viene ad essere sfasato in confronto a quello della spira considerata: si creano allora correnti di carica delle capacità fra tale spira e le altre, con conseguente aumento della capacità distribuita apparente verso terra, che, compensando la diminuzione di induttanza, mantiene costante il ritardo.

Mediante la (8) dalla  $Z = \sqrt{\frac{l(\omega/u)}{c_0 + c(0) - c(\omega/u)}}$ , si ottiene  $Z = ul(\omega/u)$ , cioè, se si mantiene costante la  $u$ , l'impedenza caratteristica all'aumentare di  $\lambda$  decresce come l'induttanza (v. curva 2 di fig. 2), anziché come la

sua radice quadrata. Con la stessa legge diminuisce il rapporto tra tensione di uscita e tensione di entrata. Si osservi che, se si possono ritenere trascurabili i parametri dissipativi, la costanza del ritardo e la variabilità dell'impe-

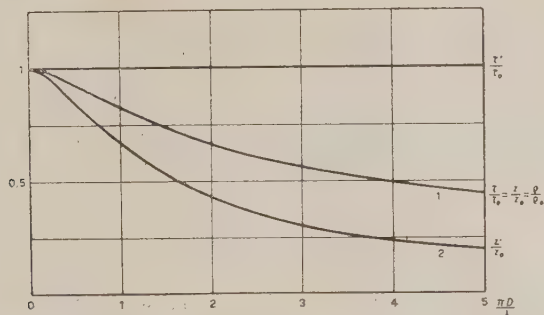


Fig. 2. -- Effetto della compensazione sulle caratteristiche di una linea di ritardo:  $D$ ,  $\lambda$  diametro e lunghezza d'onda.  $\tau_0$ ,  $Z_0$ ,  $q_0$  ritardo, impedenza caratteristica, rapporto tra tensione d'uscita e tensione d'entrata per  $\pi D/\lambda \rightarrow 0$ .  $\tau$ ,  $Z$ ,  $q$  le stesse grandezze per  $\pi D/\lambda$  generico nella linea non compensata.  $\tau'$ ,  $Z'$ ,  $q'$  le stesse nella linea compensata.

denza caratteristica con la frequenza fan sì che le onde di tensione e di corrente si propaghino senza distorsione, essendo però di forma diversa l'una dall'altra.

Per procedere nello studio si è visto che occorre conoscere la funzione  $l(\omega/u) = l(\pi D/\lambda)$  (essendo  $\omega/u = \pi D/\lambda$ ). Mostriamo ora che essa rappresenta l'induttanza della linea per unità di lunghezza, al variare di  $\omega$  o di  $\lambda$ , e che quindi è data dall'espressione (1) riportata nell'Introduzione.

Nel caso infatti di onde sinusoidali di pulsazione  $\omega$  la f.e.m.  $e(z, t)$  indotta nel solenoide per unità di lunghezza è:

$$e(z, t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} m(w) \frac{\partial}{\partial t} i(x+w, t) dw = - \int_{-\infty}^{+\infty} m(w) j\omega I \exp \left[ j\omega \left( t - \frac{x}{u} - \frac{w}{u} \right) \right] dw = \\ = - j\omega I \exp [j\omega(t - z/u)] l(\omega/u) = - l(\omega/u) \frac{di}{dt},$$

da cui

$$l(\omega/u) = - \left( \frac{e}{di/dt} \right)_{\omega},$$

che dimostra quanto asserito.

Quindi la  $l(\omega/u)$  è nota ed è, per la (1):

$$(10) \quad l\left(\frac{\omega}{u}\right) = \pi \mu_0 n^2 \frac{D^2}{2} I_1\left(\pi \frac{D}{\lambda}\right) K_1\left(\pi \frac{D}{\lambda}\right) = l(0) 2 I_1\left(\frac{D \omega}{2 u}\right) K_1\left(\frac{D \omega}{2 u}\right),$$

dove  $l(0) = \pi \mu_0 n^2 (D^2/4)$  rappresenta l'autoinduzione a frequenze molto basse poichè, come già si è detto nell'Introduzione,  $I_1(\pi D/\lambda) K_1(\pi D/\lambda)$  tende a  $1/2$  quando  $\lambda$  tende a  $\infty$ .

### 3. — Studio teorico della compensazione uniforme.

Essendo nota la  $l(\omega/u)$  è ora possibile ricavare dalla (8) la  $c(\omega/u)$  che mantenga costante la  $u$  almeno in un certo campo di frequenze. Da questa si potrebbe risalire alla  $k(w)$  attraverso l'inversa della (6):

$$(11) \quad k(w) = \frac{1}{2\pi u} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega/u) \exp [j(\omega/u)w] d\omega,$$

e dalla  $k(w)$  ad una forma delle laminette che dia luogo alla capacità richiesta. Impostiamo qui il procedimento; siccome però i calcoli relativi sono assai complessi e d'altra parte, come vedremo, si ottengono buoni risultati con laminette di forma rettangolare, in seguito utilizzeremo le formule ottenute, supponendo fissata a priori tale forma e lasciando indeterminate le dimensioni. Queste si determineranno poi in modo che la capacità che ne risulta si avvicini il più possibile alla  $k(w)$ .

Osserviamo anzitutto che la compensazione non potrà estendersi oltre una determinata gamma di frequenze. Infatti, per la (10) al crescere di  $\omega$ ,  $l(\omega/u)$  decresce indefinitamente, mentre nella (8) l'altro fattore, per il diminuire di  $c(\omega/u)$  con la frequenza, cresce al più fino a  $c_0 + c(0)$ ; ora, per la definizione di  $c(\omega/u)$ ,  $c_0 + c(0)$  rappresenta la somma della capacità distribuita verso terra e di quella tra ciascuna spira e tutte le altre, ed è quindi limitata da motivi tecnici.

Supporremo che interessi mantenere costante la velocità di propagazione della linea per le frequenze comprese tra 0 e una data  $f_M$ .

La velocità a frequenza 0 soddisfa alla  $l/u^2 = l(0)c_0$ . Sostituendo nella (8) ricaviamo per ogni valore di  $\omega$  quello che si deve assegnare alla  $c(\omega/u)$  perchè la velocità sia la stessa che a frequenza 0:

$$(12) \quad \frac{c(\omega/u)}{c_0} = l + \frac{c(0)}{c_0} - \frac{l(0)}{l(\omega/u)}.$$

Volendo allora che la velocità si mantenga costante nel campo  $0-f_M$ , sarà sufficiente assegnare in tale campo a  $c(\omega/u)$  il valore trovato, mentre il comportamento di  $c(\omega/u)$  per frequenze maggiori di  $f_M$  può essere fissato a piacere, tenendo conto della necessità di evitare la comparsa di capacità negative e della opportunità di ottenere la compensazione mediante laminette di forma semplice e di superficie compatibile con le esigenze costruttive.

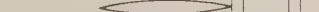


Occorre ora conoscere la relazione tra la funzione  $k(w)$  e la forma delle laminette.

Consideratane una e chiamata  $x$  una coordinata longitudinale presa a partire da un suo punto 0, ne rappresentiamo la forma con una funzione  $F(x)$  che assumiamo proporzionale alla larghezza della lamina all'interno di questa,

nulla all'esterno per comodità, e tale che  $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 1$ . Mostriamo ora che

assegnando oltre alla  $F(x)$  la  $c(0)$ , capacità per unità di lunghezza tra lamine e solenoide, si può dedurre la  $k(w)$ , cioè il tipo di compensazione resta completamente determinato, purché naturalmente il numero  $n$  di lamine per unità di lunghezza sia sufficientemente grande da poter considerare uniforme la distribuzione della capacità.



Prendendo in considerazione una lamina e riferendoci alle ascisse ora definite, determiniamo il coefficiente di capacità  $d^2C_{xx}$  che essa, quando sia mantenuta isolata, determina tra due generici elementi di solenoide  $dx dz$  di ascisse  $x$  e  $z = x + w$ . Per le convenzioni fatte, la capacità tra la lamina e tutte le spire del solenoide è  $\epsilon(0)/n$ ; quella tra la lamina e le spire  $dx$  sarà

$$\frac{[c(0)/n]F(x) \, dx}{\int F(x) \, dx} = [c(0)/n]F(x) \, dx$$

e analogamente quella tra la lamina e le spire  $dz$  sarà  $[c(0)/n]F(z)dz$ . Un aumento  $dx$  del potenziale delle spire  $dx$  indurrà quindi una carica  $dq_L = = dx[c(0)/n]F(x)dx$  sulla parte della lamina che non ricopre le spire  $dx$ , aumentandone il potenziale di

$$dv_L = \frac{dv_x [e(0)/n] F(x) dx}{e(0)/n} = dv_x F(x) dx.$$

Tale aumento di potenziale  $dv_L$  indurrà a sua volta sulle spire  $dz$  una carica  $dq_z = dv_L F(x) dx [c(0)/n] F(z) dz$ , per cui si avrà il coefficiente di capacità richiesto:

$$d^2 C_{xz} = \frac{dq_z}{dv_x} = \frac{c(0)}{n} F(x) dx F(z) dz = \frac{c(0)}{n} F(x) F(x+w) dx dz.$$

Sommando i contributi dovuti alle singole laminette, si ottiene il coefficiente di capacità  $k(w)$  tra spire distanti  $w$ , dovuto all'intera compensazione introdotta

$$k(w) = \frac{c(0)}{n} \sum_i F(x_i) F(x_i + w) = c(0) \sum_i F(x_i) F(x_i + w) \Delta x,$$

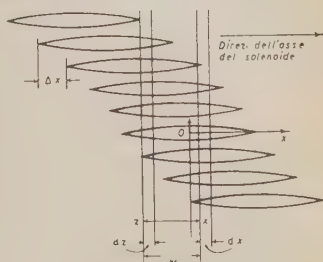


Fig. 3. — Schema di disposizione delle laminette sullo sviluppo della superficie del solenoide per ottenere una capacità di compensazione distribuita uniformemente.

in cui le  $x_i$  sono le ascisse di una delle spire rispetto alle varie laminette, e  $\Delta x = 1/n$  è la distanza tra le laminette.

AmMESSO di poter trasformare la sommatoria in integrale, si ha:

$$(13) \quad k(w) = c(0) \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) F(x+w) dx.$$

È questa la relazione cercata tra la funzione  $k(w)$  e la forma delle laminette.

Per ricavare  $F(x)$ , data  $k(w)$ , occorrerebbe risolvere quindi una equazione integrale di prima specie, non lineare, sviluppando per esempio le varie funzioni in integrale di Fourier e usando poi un metodo di successive approssimazioni.

Come si è detto, supporremo invece assegnata a priori la forma rettangolare per le laminette. Consideriamone una, chiamiamone  $a$  la lunghezza e prendiamone il centro come origine delle  $x$ . Si ha allora per la  $F(x)$ :

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 & \text{per } x < -a/2 \quad \text{o} \quad x > a/2 \\ F(x) &= 1/a & \text{»} \quad -a/2 < x < +a/2, \end{aligned}$$

$$\text{dovendo essere } \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 1.$$

Dalla  $F(x)$  risaliamo quindi alla  $k(w)$  e alla  $c(\omega/u)$  e facciamo in modo che quest'ultima si avvicini il più possibile a quella data dalla (12), determinando  $a$  in modo opportuno. A tale scopo ricaviamo  $k(w)$  mediante la (13): l'integrando, e quindi l'integrale, è nullo se  $w > a$ . Se  $|w| < a$  si ha nel caso  $w > 0$ :

$$\begin{aligned} F(x)F(x+w) &= 0 & \text{per } x < -\frac{a}{2} \quad \text{o} \quad x > \frac{a}{2} - w, \\ F(x)F(x+w) &= 1/a^2 & \text{per } -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} - w. \end{aligned}$$

Si ha quindi per  $w > 0$ .

$$k(w) = c(0) \int_{-a/2}^{a/2-w} \frac{1}{a^2} dx = \frac{a-w}{a^2}.$$

Se fosse  $w < 0$  si otterrebbe analogamente:

$$k(w) = \frac{a+w}{a^2}.$$

Si può scrivere quindi in ogni caso:

$$(14) \quad \begin{cases} k(w) = 0 & \text{per } w < -a \quad \text{o} \quad w > a, \\ k(w) = c(0) \frac{a - |w|}{a^2} & \text{»} \quad -a < w < a, \end{cases}$$

in cui  $c(0)$  è al solito la capacità totale di compensazione.

Applicando quindi la (6) ed eseguendo l'integrazione, si ottiene:

$$(15) \quad \frac{c(\omega/u)}{c_0} = \frac{c(0)}{c_0} \frac{1 - \cos 2\gamma\pi D/\lambda}{(2\gamma\pi D/\lambda)^2},$$

avendo posto  $a/D = \gamma$ .

In questo caso, come si vede, il tipo di compensazione ottenibile dipende solamente dai due parametri  $c(0)/c_0$  e  $\gamma$ . D'altra parte, per ogni valore di  $c(0)/c_0$  la (12) dà l'espressione della  $[c(\omega/u)/c_0]$  che manterrebbe il ritardo perfettamente costante; si può così confrontare tale espressione con quelle ottenibili dalla (15) per vari valori di  $\gamma$ , tracciandone, per esempio, i diagrammi di ascissa  $\pi D/\lambda$ , e scegliere per ogni valore di  $c(0)/c_0$ , quello di  $\gamma$  per cui le due curve si approssimano maggiormente (v. esempio di fig. 4). Si trova che è possibile ottenere un notevole avvicinamento delle curve entro un ampio intervallo di valori di  $\pi D/\lambda$ , compresi tra 0 e un valore massimo  $\pi D/\lambda_m$ ; ciò conferma quanto si è detto a proposito dei buoni risultati ottenibili con la forma rettangolare delle laminette.

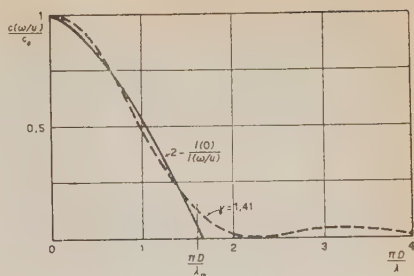


Fig. 4. — Confronto, nel caso  $c(0)/c_0 = 1$ , tra l'andamento di  $c(\omega/u)/c_0$  che si dovrebbe avere perchè il ritardo sia costante e quello realizzabile con laminette rettangolari aventi  $\gamma = a/D = 1,41$ . La concordanza è buona fino a frequenze tali che  $\pi D/\lambda = 1,65$ .

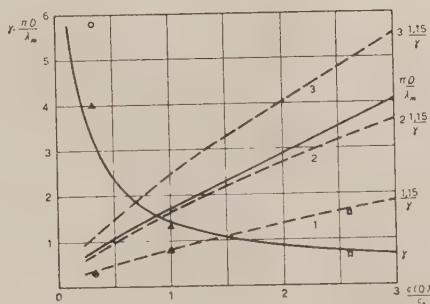


Fig. 5. — Compensazione con lamine rettangolari. Le ascisse rappresentano il rapporto tra capacità di compensazione e capacità verso terra. Le linee a tratto pieno danno rispettivamente il valore ottimo per il rapporto  $\gamma$  tra lunghezza dei rettangoli e diametro del solenoide e il valor massimo di  $\pi D/\lambda$  nel caso di distribuzione uniforme della capacità di compensazione. Le curve 1, 2, 3 danno il valor massimo  $\pi D/\lambda_m$  di  $\pi D/\lambda$  per compensazione realizzata con 1, 2, 3, strisce longitudinali a tagli equidistanti, e sfasati nel caso delle ultime due.

- ▲ Valori di  $\gamma$  e di  $\pi D/\lambda_m$  nelle linee ottenute sperimentalmente dal KALLMANN.
- in quella di LEPRI, QUERCIA, RISPOLI.
- in quella di ERICKSON e SOMMER.



La fig. 4 rappresenta nel caso  $c(0)/c_0 = 1$  la (12) e la (15), nella quale si è scelto per  $\gamma$  il valore 1,41, che rende la concordanza molto buona. Si desume in tal caso  $\pi D/\lambda_m = 1,65$ . Ripetendo la costruzione per vari valori di  $c(0)/c_0$  sono stati ricavati i diagrammi di fig. 5, che danno senz'altro per ogni valore di  $c(0)/c_0$  il più conveniente valore di  $\gamma$  e il corrispondente  $\pi D/\lambda_m$ .

#### 4. - Confronto con risultati sperimentali.

Esaminiamo anzitutto fino a che punto la teoria svolta per linee in cui la capacità di compensazione è distribuita uniformemente si possa applicare a quelle in cui è ottenuta con rettangoli affiancati o altre disposizioni simili.

In queste ultime la capacità di compensazione tra due elementi di senoide di ascisse  $x$  e  $z$  non dipenderà più solo dalla loro distanza  $w$ , ma dovrà essere espressa sotto forma di una funzione di  $x$  e  $z$ :  $k'(x, z)$ . È facile però vedere che facendo la media tra le capacità che si ottengono prendendo i due elementi a distanza  $w$  in tutte le posizioni possibili rispetto alle laminette, si ottiene nuovamente una capacità dipendente solo dalla distanza  $w$  degli elementi, e rappresentata dalla stessa funzione  $k(w)$  che si sarebbe ottenuta con una distribuzione uniforme, in cui la forma delle laminette e la capacità totale per unità di lunghezza fossero le stesse; quindi si ha:

$$(16) \quad \frac{1}{a} \int_a^{x+a} k'(x, x+w) dx = k(w),$$

in cui l'integrazione è effettuata in un qualsiasi intervallo di lunghezza  $a$ .

In questo caso quindi, mentre la prima delle equazioni di propagazione (3) rimane inalterata, la seconda va modificata scrivendo  $k'(x, z)$  al posto di  $k(z-x)$ ; facendone la media nell'intervallo  $a$  compreso tra le ascisse  $x-a/2$  e  $x+a/2$  si ottiene:

$$\frac{1}{a} \int_{x-a/2}^{x+a/2} \frac{\partial i}{\partial x} dx' = g \frac{1}{a} \int_{x-a/2}^{x+a/2} v dx' + c_0 \frac{1}{a} \int_{x-a/2}^{x+a/2} \frac{\partial v}{\partial t} dx' + \frac{1}{a} \int_{x-a/2}^{x+a/2} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} k'(x', z) \frac{\partial}{\partial t} [v(x', t) - v(z, t)] dz.$$

Se si considera la propagazione di onde sinusoidali di lunghezza sufficientemente grande in confronto alla lunghezza  $a$ , negli integrali si potrà sostituire ad  $i$ ,  $v$  e alle loro derivate il valore nel punto di mezzo  $x$  dell'intervallo di integrazione  $a$ , e si ha quindi, scambiando l'ordine di integrazione nell'integrale doppio:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = gv + c_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{a} \int_a^{x+a} k'(x', z) dx' \right] \frac{\partial}{\partial t} [v(x, t) - v(z, t)] dz.$$

Osservando che  $z - x = w$ , si vede che l'equazione viene a coincidere con la seconda delle (3), in cui la funzione  $k$  è data dalla (16). Nell'ipotesi fatta che la lunghezza d'onda sia sufficientemente grande in confronto ad  $a$ , il fenomeno è quindi retto dalle stesse equazioni che varrebbero se la distribuzione della capacità di compensazione fosse uniforme.

Le linee sperimentali citate del KALLMANN <sup>(2)</sup>, come altre di cui si dirà in seguito, sono state ottenute per tentativi, dividendo una striscia conduttrice applicata lungo il solenoide in un numero sempre maggiore di parti uguali, rilevando per ognuna delle linee così ottenute il diagramma del ritardo in funzione della frequenza, e scegliendo poi la linea per cui il ritardo rilevato a frequenze basse si manteneva costante in un certo intervallo di frequenze. Dall'esame dei diagrammi di ritardo ottenuti in tal modo dal KALLMANN si vede che nel caso in cui la scelta non sia stata effettuata bene il ritardo varia molto rapidamente fin dall'inizio del diagramma, e che quindi per tale scelta è sufficiente considerare il comportamento a frequenze relativamente basse. Precisamente si può valutare che per poter effettuare la scelta con discreta approssimazione sia sufficiente utilizzare lunghezze d'onda maggiori di 7-8 volte la lunghezza dei rettangoli, per le quali certamente la teoria è applicabile per i motivi detti. Le dimensioni dei rettangoli ottenute sperimentalmente dovranno quindi concordare con quelle date dalla teoria.

Le due linee per cui i dati riportati nell'articolo citato del KALLMANN sono sufficienti al confronto con la nostra teoria, hanno valori di  $c(0)/c_0$  uguali rispettivamente a  $1/3$  e a  $1$ . Sul grafico di fig. 5 abbiamo riportati i relativi valori di  $\gamma$  (4 e 1,33 rispettivamente). Come si vede, la concordanza è molto buona se si tien conto delle notevoli incertezze sperimentali. Per quanto concerne il valore minimo  $\lambda_m$  di  $\lambda$  per cui il ritardo rimane costante, il KALLMANN trova che esso è proporzionale alla lunghezza dei rettangoli. Dai dati da lui riportati si ricava:  $\lambda_m \cong 1,35 \cdot 2a$ , cioè  $\pi D/\lambda_m \cong 1,15/\gamma$ .

Il diagramma di fig. 5 mostra che tale valore è inferiore alla metà di quello che sarebbe ottenibile con una distribuzione uniforme (v. curva  $\pi D/\lambda_m$  ottenuta dalla teoria).

Altre linee di ritardo compensate sono state costruite da LEPRI, QUERCIA e RISPOLI <sup>(3)</sup> e recentemente con particolare accuratezza da ERICKSON e SOMMER <sup>(4)</sup>. Dai dati riportati dai primi si desume che le linee sperimentate hanno  $c(0)/c_0 \cong 1/3$ , supposte le capacità proporzionali alle aree ricoperte. Le dimensioni consigliate per i rettangoli corrispondono a  $\gamma = 5,8$  (v. cerchietto in fig. 5). Esaminando i diagrammi di ritardo da loro riportati per vari valori di  $\gamma$ , si vede che il divario dal valore da noi calcolato ( $\gamma = 3,1$ ) e da quello

<sup>(3)</sup> F. LEPRI, I. F. QUERCIA e B. RISPOLI: *Nuovo Cimento*, **5**, 569 (1948).

<sup>(4)</sup> R. A. ERICKSON e H. SOMMER: *P.I.R.E.*, **38**, 1036 (1950).

adottato dal KALLMANN ( $\gamma = 4$ ) per lo stesso  $c(0)/c_0$  rientra probabilmente nei limiti degli errori sperimentali, data l'incertezza con cui si può individuare il valore di  $\gamma$  per cui il ritardo è più costante; altra causa del divario può essere cercata nella determinazione del rapporto  $c(0)/c_0$ . Ritenendo costante il ritardo, in base ai diagrammi citati, fino a 4,2 MHz, si ottiene  $\pi D/\lambda_m = 0,28$ , valore di poco inferiore a quello ottenuto dal KALLMANN.

Le linee costruite da ERICKSON e SOMMER si distinguono per valori molto alti di  $c(0)/c_0$ , dell'ordine di 3, e quindi di  $\pi D/\lambda_m$ . Per tali valori di  $c(0)/c_0$  la concordanza tra le due curve analoghe a quelle di fig. 4 non è più così buona, per cui la costanza del ritardo è garantita solo entro limiti dell'ordine del 3-5%. Le linee provate hanno  $\gamma = 0,66$  e  $c(0)/c_0$  variabile; dai diagrammi del ritardo in funzione della frequenza risulta che hanno dato risultati migliori quelle corrispondenti a  $c(0)/c_0 = 2,2$  e 3,27. Come valore di  $c(0)/c_0$  corrispondente alle nostre ipotesi abbiamo scelto quello intermedio 2,6, perchè tale da mantenere la costanza del ritardo entro il 3% circa su una gamma di frequenze commisurata a quella data dal KALLMANN ( $\pi D/\lambda_m \approx 1,61$ ). Come si vede dalla fig. 5 (v. quadretto), la concordanza con il valore di  $\gamma$  da noi previsto è ottima, anche se vi è una certa incertezza nel valore da dare all'ascissa.

## 5. - Conclusioni.

Il procedimento per progettare la compensazione di una linea diventa molto semplice servendosi dei diagrammi da noi ricavati: si fissa innanzi tutto il valore massimo di  $\pi D/\lambda$  per cui si vuole mantenere costante il ritardo, compatibilmente con la variazione dell'impedenza caratteristica (v. curva 2 fig. 2); quindi dalla curva 1 del grafico di fig. 5 si ricaverà il valore di  $c(0)/c_0$  necessario, e, se questo è ammissibile per le esigenze costruttive, dalla curva che dà  $\gamma$  in funzione di  $c(0)/c_0$  si desume il valore di  $\gamma = a/D$  più opportuno.

La teoria svolta può inoltre suggerire alcuni miglioramenti.

Se la capacità di compensazione fosse distribuita uniformemente, il valore massimo di  $\pi D/\lambda$  sarebbe assai maggiore, come si è visto. Poichè una disuniformità di periodo  $a$  nella distribuzione provoca un effetto sensibile solo quando  $\lambda$  scende a circa  $1,35 \cdot 2a$ , è presumibile che se tale periodo fosse portato ad  $a/N$ , l'effetto si farebbe sentire solo quando  $\lambda$  scendesse a circa  $(1,35/N)2a$ . Lo scopo si potrebbe facilmente raggiungere utilizzando  $N$  strisce longitudinali tagliate ciascuna in rettangoli uguali di lunghezza  $a$ , in modo che quelli di ciascuna striscia siano sfasati di  $a/n$  rispetto a quelli della striscia precedente. Le curve 2 e 3 di fig. 5 (di ordinate  $2 \cdot 1,15/\gamma$  e  $3 \cdot 1,15/\gamma$  rispettivamente) darebbero allora i valori massimi di  $\pi D/\lambda$ , rispettivamente per  $N = 2$  e 3, sotto i quali la disuniformità non si farebbe sentire. Naturalmente



la compensazione avviene in ogni caso solo per valori di  $\pi D/\lambda$  al di sotto della curva corrispondente alla distribuzione uniforme. Dai diagrammi si vede che con due strisce si raddoppierebbe il valore di  $\pi D/\lambda_m$ , mentre la convenienza di usarne tre sarebbe assai ridotta.

Come si è detto, l'uso di laminette di forma diversa dalla rettangolare non è in genere conveniente per le notevoli disuniformità accidentali che si introducono con i metodi costruttivi ordinari. Può tuttavia essere preso in considerazione per ottenere linee con valori elevati del rapporto  $\pi D/\lambda_m$  e quindi di  $\epsilon(0)/\epsilon_0$ , poichè in tal caso, come si è accennato, la capacità ottenibile con rettangoli si discosta maggiormente da quella necessaria per una perfetta compensazione.

Sono lieto di esprimere i più vivi ringraziamenti all'ing. ADA BALZANELLI, per i calcoli e le costruzioni relativi ai grafici di fig. 5 e per l'aiuto nella revisione del lavoro.

---

#### SUMMARY

The problem of « compensation » in distributed constants delay-lines is schematically treated supposing the distribution of parameters to be uniform. We obtain from such a scheme (fig. 1) the propagation equations (3). This study brings us to the conclusion that it is possible to determine a compensation capacity which can maintain a constant delay in a prefixed frequency range. Calculations are made in the case of compensation capacity obtained with conducting rectangles; from that we deduce the graph shown in fig. 5, through which a project can immediately be planned. The results that have been achieved are in good agreement with the constructive data of the lines obtained through attempts by KALLMANN and some others. Finally it is shown how the theory can suggest some devices so that the frequency range, where the delay remains constant, may be extended.

## Sull'effetto Faraday di sostanze paramagnetiche nella regione delle microonde.

A. GOZZINI

*Istituto di Fisica dell'Università - Pisa*

(ricevuto il 18 Agosto 1951)

**Riassunto.** — Si è studiata sperimentalmente la rotazione del piano di polarizzazione di microonde rettilineamente polarizzate che attraversano sostanze paramagnetiche immerse in un campo magnetico parallelo alla direzione di propagazione delle microonde. Le esperienze sono fatte a 3,2 cm di lunghezza d'onda; il campo è fatto variare da 1 800 a 4 800 oersted. La costante di Verdet cambia segno nell'intorno dei valori del campo magnetico per i quali si presenta il fenomeno della risonanza paramagnetica. Viene descritto il dispositivo sperimentale e vengono dati i risultati di misure preliminari eseguite su tre sali paramagnetici.

1. — La teoria elementare dell'effetto Faraday, basata sul teorema di Larmor, prevede, per l'angolo di rotazione del piano di polarizzazione della luce polarizzata che traversa un dielettrico immerso in un campo magnetico parallelo alla direzione di propagazione, una proporzionalità col quadrato della frequenza della luce stessa, nelle regioni di dispersione normale, ed un senso concorde con quello della corrente magnetizzante che produce il campo; nelle vicinanze di una riga di assorbimento poi, il valore dell'angolo di rotazione in funzione della frequenza risulta simmetrico rispetto alla frequenza di risonanza, e fortemente esaltato (effetto Macaluso-Corbino), pur mantenendosi sempre la rotazione del senso della corrente magnetizzante <sup>(1)</sup>. La teoria quantistica dell'effetto, data da ROSENFELD per il caso dei gas monoatomici, prevede inoltre, per temperature molto basse o nel caso di atomi dotati di un forte momento magnetico, un'inversione del senso della rotazione nel passaggio

(<sup>1</sup>) R. BECKER: *Teoria della elettricità* (Firenze, 1950), pag. 171.

attraverso una frequenza di risonanza <sup>(2)</sup>. (Ciò è stato sperimentalmente osservato da BECQUEREL e DE HAAS <sup>(3)</sup>).

Data la proporzionalità dell'entità della rotazione col quadrato della frequenza nessuno effetto apprezzabile è da attendersi alla frequenza delle microonde se non nel caso in cui una delle frequenze di risonanza del dielettrico cada in tale regione.

Il fenomeno, riferito per primo da ZAVOISKY <sup>(4)</sup>, dell'assorbimento per risonanza magnetica di microonde da parte di sali paramagnetici, suggerisce l'ipotesi che tali sostanze possano presentare, in condizioni analoghe a quelle per cui si ha l'assorbimento, un notevole effetto Faraday, dallo studio del quale possano dedursi informazioni su tali bande. L'assorbimento ha luogo se la sostanza è sottoposta ad un campo magnetico statico perpendicolare a quello ad alta frequenza ed è soddisfatta la relazione

$$h\nu = g\beta H,$$

( $g$  fattore di Landé,  $\beta$  magnetone di Bohr) fra la frequenza delle microonde ed il campo applicato.

A. KASTLER <sup>(5)</sup> ha investigato teoricamente l'effetto Faraday presentato da sali paramagnetici nelle condizioni della risonanza magnetica, ed ha proposto lo studio di tale effetto, come più agevole alla rivelazione delle risonanze della misura diretta delle frequenze di assorbimento.

Una ricerca sperimentale sull'effetto Faraday alla frequenza delle microonde è stata fatta da WILSON e HULL <sup>(6)</sup>, che hanno sperimentato numerosi dielettrici alla lunghezza d'onda di 3,3 cm, trovando un effetto apprezzabile in due sali manganosi, il solfato ed il cloruro. I valori del campo magnetico ai quali i due autori hanno sperimentato sono lontani da quelli di risonanza. Come è noto, la banda di assorbimento per risonanza magnetica presenta, nei cristalli idrati, molti massimi distanti fra loro qualche centinaio di oersted (se le esperienze sono condotte mantenendo costante la frequenza e variando il campo), la posizione dei quali dipende dalla orientazione del campo magnetico rispetto agli assi del cristallo; ciò spiega perchè i due autori citati abbiano rilevato l'effetto nei due sali di manganese idrati che, nelle condizioni della loro esperienza, presentavano una larghissima banda. Nelle nostre esperienze il campo è stato fatto variare in una vasta regione comprendente il valore di

<sup>(2)</sup> L. ROSENFELD: *Zeits. f. Phys.*, **57**, 835 (1930); J. H. VAN VLECK: *Electric and magnetic susceptibilities* (Oxford, 1932), pag. 367.

<sup>(3)</sup> J. BECQUEREL: *Phil. Mag.*, **16**, 153 (1908); J. BECQUEREL e W. DE HAAS: *Zeits. f. Phys.*, **57**, 11 (1929).

<sup>(4)</sup> E. ZAVOISKY: *Journ. Phys. U.S.S.R.*, **9**, 211 (1945); **10**, 170 (1946).

<sup>(5)</sup> A. KASTLER: *Compt. Rend.*, **228**, 1640 (1949).

<sup>(6)</sup> M. CARR WILSON e G. F. HULL: *Phys. Rev.*, **74**, 711 (1948).

risonanza che, per una lunghezza d'onda di 3,2 cm ed un fattore di Landé uguale a 2, è 3343 oersted. La rotazione presenta un massimo, si annulla e presenta un massimo nel senso opposto, nell'intorno del valore del campo magnetico in cui si ha la risonanza. Il senso della rotazione, nei sali sperimentati, è quello della corrente che circola nel solenoide, ai campi minori di quello di risonanza, contrario ai campi maggiori; ciò mostra che il segno del fattore di Landé delle sostanze esaminate è positivo. I valori massimi della rotazione sono diversi, maggiore essendo quello ai più alti valori del campo, mentre il valore della rotazione specifica può ritenersi uguale e di segno contrario nell'intorno del valore di risonanza.

Le esperienze sono state fatte su campioni costituiti da polveri cristalline formate da numerosi piccoli cristalli comunque orientati rispetto al campo, cosicché lo spettro di rotazione magnetica trovato non risulta risolto. Esperienze sono in corso su grossi monocristalli, nei quali si spera di osservare tale spettro risolto, come pure per adattare il metodo alla ricerca delle risonanze proprie di rotazione pura, nella banda dei 3 cm.

Durante il corso delle nostre esperienze una nota di J. SOUTIF e M. LAMBINET (<sup>7</sup>), riferisce i risultati preliminari di misure sulla rotazione Faraday eseguite con una tecnica simile alla nostra, alla lunghezza d'onda di 10 cm, sul solfato di Manganese anidro. La rotazione da essi trovata ha, in funzione del campo, un andamento simile a quello risultante dalle nostre misure sul composto idrato, solo l'entità delle rotazioni è più piccola a causa del minore valore del campo magnetico.

2. - L'apparecchiatura sperimentale, schematizzata in fig. 1 consiste in una guida d'onda a sezione quadrata, eccitata con onde  $TE$ , che contiene il

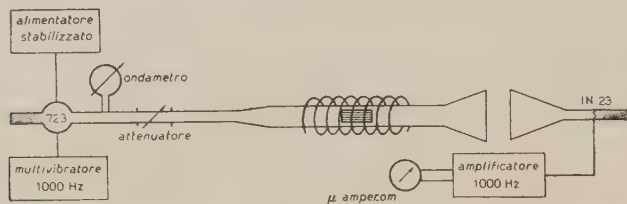


Fig. 1.

dielettrico esaminato e che è immersa in un campo magnetico parallelo al suo asse. Nella guida il piano di polarizzazione dell'onda  $TE$  può ruotare liberamente, e può venire individuato da un sistema analizzatore. Ad una dell'estremità la guida è raccordata dolcemente ad una guida a sezione rettangolare, di dimensioni tali da consentire, per la frequenza interessata, la trasmissione

(<sup>7</sup>) J. SOUTIF e M. LAMBINET: *Compt. Rend.*, **231**, 1460 (1950).



del solo modo  $TE_{01}$ . Il raccordo fra le due guide è fatto con particolare cura onde evitare l'eccitazione di modi superiori, che produrrebbero una polarizzazione solo parziale. L'altra estremità della guida a sezione quadrata termina con una antenna a tromba, mentre la guida a sezione rettangolare è eccitata da un klystron 723 A/B, oscillante a 3,2 cm di lunghezza d'onda. Un onda-metro ed un attenuatore sono inseriti nella linea di trasmissione costituita dalle due guide. La sezione quadrata è stata preferita alla circolare perchè sperimentalmente trovata più adatta a mantenere lo stato di polarizzazione rettilinea dell'onda  $TE$ , che, nel caso della guida circolare, risulta distrutto da eventuali piccole ellitticità della sezione della guida stessa. Il campo magnetico è ottenuto con un grosso solenoide, nel cui asse è posta la guida quadrata, opportunamente raffreddato in modo da poter produrre un campo sensibilmente uniforme per una ventina di centimetri, dell'intensità massima di 5000 oersted. Il klystron è modulato in ampiezza da una tensione rettangolare alla frequenza di 1000 cicli, applicata all'elettrodo repulsore; tale forma di modulazione assicura una buona monocromaticità all'oscillatore. Il ricevitore, che funziona anche da analizzatore, consiste in un diodo a cristallo IN23, alloggiato in un tronco di guida rettangolare terminante ad una estremità con una antenna a tromba, ed all'altra con materiale assorbente. Il cristallo riceve solo la componente della radiazione incidente che ha il vettore elettrico normale al lato maggiore della sezione retta della guida in cui è alloggiato. Tutto il sistema può ruotare intorno all'asse della guida, in maniera da funzionare da analizzatore dello stato di polarizzazione, e le rotazioni possano essere lette con una precisione di  $4'$ .

Le antenne a tromba terminanti la guida ed il ricevitore sono a sezione rettangolare, con angoli di apertura scelti in modo da adattare le impedenze della guida e del ricevitore a quella dello spazio libero <sup>(8)</sup>, in modo da evitare riflessioni verso il generatore, che renderebbero imperfetta la polarizzazione. Con questo artificio e terminando l'altra estremità della guida con materiale assorbente si è potuto ottenere nell'interno della guida quadrata un rapporto delle onde stazionarie minore di 1,1. L'apparato ricevitore-analizzatore è posto ad una certa distanza dalla guida onde minimizzare le riflessioni fra le due antenne, e l'ambiente circostante è stato rivestito con materiale assorbente (strati di ovatta inumidita) onde evitare eventuali recezioni non dirette.

La tensione di modulazione presente ai capi del cristallo è fortemente amplificata da un amplificatore a banda stretta accordato a 1000 cicli; l'uscita del quale è inviata, dopo opportuna rettificazione, ad un microamperometro. Le indicazioni di questo strumento possono con buona approssimazione ritenersi proporzionali alla potenza incidente sul cristallo. Nelle condizioni sopra esposte,

---

<sup>(8)</sup> R. I. SARBACHER e W. A. EDSON: *Hyper and ultrahigh frequency engineering* (New York, 1946), pag. 400 e seg.

con il ricevitore posto nella posizione zero, e con il massimo della amplificazione, lo strumento registra solo il rumore di fondo dell'amplificatore ( $20 \mu\text{A}$ ); con il klystron che eroga 10 milliwatt di potenza una rotazione a destra o a sinistra di  $20'$  basta a mandarlo in fondo scala ( $100 \mu\text{A}$ ).

L'angolo di rotazione del piano di polarizzazione viene determinato, per ogni valore del campo magnetico, facendo la media di due letture fatte in due posizioni simmetriche rispetto a quella di minimo, cioè tali da dare le stesse indicazioni sullo strumento, e confrontandola con la posizione del minimo in assenza di campo. Per l'osservazione dell'effetto all'oscillografo i morsetti del

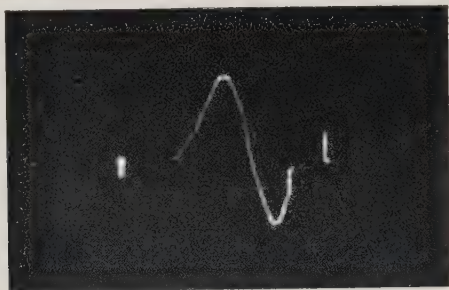


Fig. 2.

solenoidi sono connessi alle placchette orizzontali di un tubo r. c., alle placchette verticali del quale è inviata, dopo ulteriore amplificazione mediante un amplificatore in continua, la tensione presente ai morsetti dello strumento. Il ricevitore è posto a  $45^\circ$  rispetto alla direzione del piano di polarizzazione senza campo; in tale posizione la variazione di potenza ricevuta per una assegnata rotazione del piano di polarizzazione è massima. Un reostato costituito da un grosso voltmetro di cui è possibile variare con continuità la superficie di un elettrodo, permette d'inserire lentamente il campo. La traiettoria descritta dal pennello catodico quando il campo è lentamente inserito rappresenta la variazione della potenza ricevuta dal cristallo per l'effetto della rotazione e per quello dell'assorbimento paramagnetico e quindi non può essere utilizzata che per una indicazione qualitativa del fenomeno; tuttavia, essendo l'effetto causato dalla rotazione prevalente rispetto a quello dovuto all'assorbimento, il grafico ottenuto fotografando tale traiettoria ha l'andamento di quelli costruiti per punti. A causa dell'effetto di assorbimento l'oscillogramma ottenuto con il ricevitore posto in modo che la rotazione Faraday tenda a portarlo alla massima ricezione, non è simmetrico con quello ottenuto con il ricevitore posto in modo che la rotazione tenda a portarlo alla estinzione, e dall'entità di tale dissimmetria può aversi un'idea dell'entità dell'assorbi-

mento. In fig. 2 è riportato uno di tali oscillogrammi eseguito sul solfato di Manganese.

3. — Riportiamo nei grafici e nelle tabelle accluse i risultati delle misure preliminari eseguite su carbonato e solfato di Manganese e sul solfato di Cromo e Potassio; i valori del campo magnetico sono stati dedotti da quelli della corrente e dalle caratteristiche geometriche del solenoide, e si riferiscono al centro di esso; agli alti valori del campo magnetico le misure sono affette da un errore percentuale maggiore di quello di cui sono affette le misure a bassi valori del campo; ciò perchè la corrente non rimane costante il tempo necessario per la misura, a causa del progressivo riscaldarsi del filo, e nella zona della risonanza una piccola variazione della corrente porta una sensibile variazione della rotazione. In tale zona varie misure eseguite per gli stessi valori del campo hanno presentato uno scarto massimo del 20%, in alcuni campioni. In diverse sostanze, ai valori del campo prossimi a quelli di risonanza, la radiazione emergente dal dielettrico è risultata debolmente ellittica, e l'eccentricità è risultata variabile col campo magnetico. In tali casi per angolo di rotazione è stato preso quello fra la direzione del semiasse minore dell'ellisse e la posizione di zero senza campo. Misure più accurate sono in corso con un solenoide notevolmente più lungo, capace di fornire un campo più uniforme in tutta la lunghezza dei campioni, e con un apparato ricevitore in cui si possano leggere le rotazioni con la precisione di 1'.

*Allume di Cromo e Potassio.* — Il campione è costituito da 65 g di questa sostanza, in minuti cristalli idrati introdotti in un prisma a sezione quadrata di sottile cartoncino, che è posto nell'interno della guida, nella zona centrale del solenoide. La differenza percentuale fra il valore del campo ad una estremità ed al centro del campione è dell'1,8%. La risonanza paramagnetica di questo composto è stata oggetto di numerose ricerche, teoriche e sperimentali, basate sulla misura e sulla posizione delle righe di assorbimento (\*).

La rotazione è risultata dello stesso senso della corrente che percorre il solenoide ai campi minori di quello di risonanza, di senso contrario ai campi maggiori. L'inversione avviene a 3580 oersted. La lunghezza del campione è di 14 cm.

*Carbonato manganoso.* — Il campione è costituito da 50 g di sostanza preparata come la precedente, in polvere anidra grigiastra, ed è lungo 12 cm. Il comportamento della rotazione è analogo a quello presentato dalla sostanza

(\*) D. M. BAGGULEY e J. H. E. GRIFFITHS: *Nature*, **160**, 532 (1947); B. BLEANEY e R. P. PENROSE: *Proc. Phys. Soc.*, **60**, 395 (1948); C. A. WHITHNER, R. T. WEIDNER, J. S. HSIANG e P. R. WEISS: *Phys. Rev.*, **74**, 1479 (1948); D. HALLIDAY e J. WHEATLEY: *Phys. Rev.*, **74**, 1712 (1948); R. MALVANO e M. PANETTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 28 (1950).

precedente, l'inversione avviene a 3430 oersted. Tale composto stato esaminato da WILSON e HULL<sup>(10)</sup> che non hanno riscontrato l'effetto, a causa forse della piccola lunghezza del loro campione e del basso valore del campo, troppo lontano da quello di risonanza.

*Solfato manganoso.* - L'assorbimento paramagnetico e la rotazione Faraday di questo sale sono stati studiati a 3 e 10 cm di lunghezza d'onda<sup>(11)</sup>. Il campione esaminato è costituito da 65 g di cristallini idrati, ed è lungo 13,5 cm. L'inversione avviene a 3280 oersted.

Nella tabella sono riportati i risultati delle misure sui tre sali, ogni valore è la media di diverse misure.

Nella tabella  $\alpha$  indica l'angolo di rotazione osservato, misurato in minuti primi,  $R$  la costante di Verdet, in minuti primi/cm · oersted.

Allume di Cromo e Potassio			Solfato manganoso			Carbonato manganoso		
$H$	$\alpha$	$R \cdot 10^3$	$H$	$\alpha$	$R \cdot 10^3$	$H$	$\alpha$	$R \cdot 10^3$
1640	10	0,44	1690	30	1,31	1400	25	1,48
1790	25	1,00	1790	30	1,24	1640	30	1,52
2440	30	0,88	1990	60	2,23	2000	45	1,87
2700	40	1,06	2540	80	2,33	2290	55	2,00
3000	40	0,96	2840	90	2,34	2600	55	1,76
3050	40	0,94	2920	80	2,02	2840	50	1,46
3250	40	0,88	3000	70	1,72	3010	70	1,93
3430	30	0,62	3070	30	0,72	3100	80	2,15
3500	30	0,61	3150	20	0,47	3160	70	1,84
3580	0	0,00	3280	0,0	0,00	3280	60	1,52
3720	-20	-0,38	3430	-30	-0,65	3370	20	0,50
3750	-40	-0,76	3490	-50	-1,06	3430	0	0,0
3820	-40	-0,74	3605	-70	-1,45	3460	-40	-0,96
3870	-50	-0,92	3725	-100	-1,99	3570	-80	-1,86
3890	-65	-1,19	3750	-130	-2,57	3725	-110	-2,46
4050	-65	-1,14	3990	-140	-2,60	3900	-140	-2,99
4230	-70	-1,18	4170	-130	-2,31	4025	-150	-3,10
4350	-60	-0,98	4320	-130	-2,23	4170	-140	-2,79
4750	-40	-0,60	4500	-125	-2,05	4320	-100	-1,93
						4470	-80	-1,50
						4750	-60	-1,05

<sup>(10)</sup> M. C. WILSON e G. F. HULL: loc. cit.

<sup>(11)</sup> R. L. CUMMEROW e D. HALLIDAY: *Phys. Rev.*, **70**, 433 (1945); **72**, 173 (1947); D. HALLIDAY e J. WHEATLEY: *Phys. Rev.*, **74**, 1724 (1948); C. WILSON e G. F. HULL: loc. cit.; J. SOUTIF e M. LAMBINET: loc. cit.



Oltre ai tre sali precedenti, che sono stati quelli maggiormente investigati, hanno presentato l'effetto anche il cloruro, nitrato, solfuro, ossalato, acetato di Manganese (manganosi) ed il solfato di Cromo e  $\text{NH}_4$ . Non si è osservato

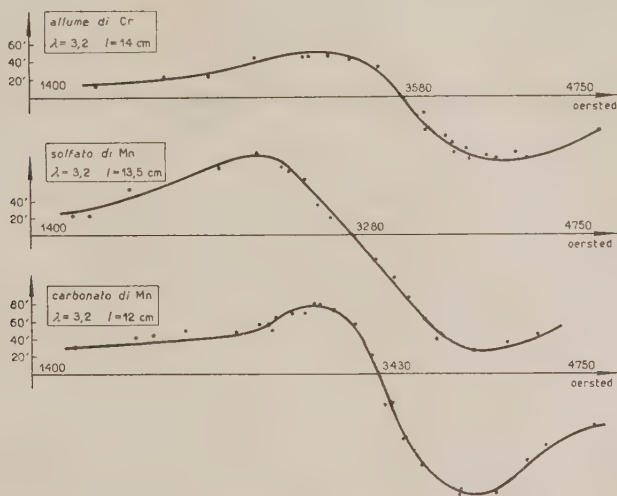


Fig. 3. — Rotazioni osservate in funzione del campo magnetico. Il senso positivo delle rotazioni è quello della corrente che circola nel solenoide.

l'effetto in numerosi altri sali di elementi del gruppo del Ferro, fra i quali alcuni che pure hanno presentato l'assorbimento per risonanza magnetica. Probabilmente il risultato negativo su questi composti è da imputarsi a non sufficiente sensibilità dell'apparato, ed al fatto che, per il notevole assorbimento di queste sostanze, le esperienze devono essere condotte con campioni di breve lunghezza.

#### SUMMARY

Measurements have been made of the Faraday effect on paramagnetic salts, at 3.2 cm wavelength. The Verdet's constant is found to change sign through the paramagnetic resonance band. A description of the experimental apparatus is given. The method proves to be particularly suitable for a simple determination of the  $g$  factor.

## Sulla componente nucleonica nell'atmosfera.

E. CLEMENTEL

*Istituto di Fisica dell'Università - Padova*

G. PUPPI

*Istituto di Fisica dell'Università - Napoli*

(ricevuto l'11 Settembre 1951)

**Riassunto.** — Viene ripreso il problema della diffusione della componente nucleonica di bassa energia nella atmosfera, che viene descritta tramite due equazioni distinte per protoni e neutroni. I fattori di crescita nella bassa e media atmosfera sono in accordo con l'esperienza. Vengono discussi inoltre i dati sperimentali sull'intensità verticale dei protoni e i vari parametri che entrano nella descrizione della diffusione delle componenti in esame.

### Introduzione.

Il problema della diffusione della componente nucleonica nell'atmosfera è stato trattato da vari autori, ma in generale limitatamente alla zona delle energie elevate <sup>(1)</sup> dove l'assorbimento della componente è praticamente dovuto alla generazione di mesoni. Alcuni autori <sup>(2)</sup> hanno tentato una estensione del problema fino ad energie dell'ordine di alcune centinaia di MeV. Per energie di questo ordine i processi di generazione di mesoni sono poco importanti e l'assorbimento della componente nucleonica ha luogo per processi non radiativi quali il frenamento di materia nucleare e in più, per i protoni, per per-

---

<sup>(1)</sup> W. HEITLER e L. JANOSSY: *Proc. Phys. Soc.*, A **62**, 374 (1949); vedi anche P. CALDIROLA: *Nuovo Cimento*, **6**, 565 (1949).

<sup>(2)</sup> B. FERRETTI: *Nuovo Cimento*, **6**, 379 (1949); P. BUDINI e N. DALLAPORTA: *Nuovo Cimento*, **7**, 230 (1950); H. MESSEL: *Phys. Rev.*, **83**, 21 (1951).

dite di energia per ionizzazione. Poichè però i nucleoni prima di essere bloccati compiono in media vari attraversamenti nucleari cambiando il loro stato di carica, avviene che anche le perdite di energia per ionizzazione si distribuiscono sulle due componenti, il che ha suggerito la trattazione del problema nei termini di un'unica componente. Protoni e neutroni vengono poi separati nella soluzione finale tenendo conto delle fluttuazioni nella permanenza dei nucleoni nei due stati di carica.

Nel presente lavoro le due componenti sono trattate separatamente ed il loro comportamento è descritto da due equazioni di diffusione tipiche per la zona energetica in cui prevale il frenamento per processi non radiativi (da 0,2 a 1 GeV). Questo ci ha dato l'occasione di rivedere i dati sperimentali che possono servire per un confronto e per quanto riguarda la fenomenologia della componente in esame nell'atmosfera e per quanto riguarda i singoli parametri che entrano nelle equazioni.

Riteniamo opportuno premettere alla trattazione delle equazioni di diffusione l'esame del quadro sperimentale.

## 1. — Spettri di protoni e rapporto protoni-neutroni.

Le informazioni sulla nucleonica responsabile degli eventi nucleari nell'atmosfera si possono ottenere da due serie di dati. La prima serie comprende le misure dirette sul flusso verticale della componente protonica lungo l'atmosfera; la grandezza che si determina in tal caso è l'intensità verticale alle varie quote dei protoni. La corrispondente intensità verticale per neutroni non è suscettibile di determinazione diretta e deve pertanto essere stimata in base alla conoscenza del rapporto protoni-neutroni. La seconda serie di dati si riferisce all'esame degli eventi nucleari (lastre fotografiche, camera di Wilson e camere di ionizzazione) prodotti dalla componente nucleonica e della loro frequenza in funzione della quota, del tipo della particella responsabile (protoni o neutroni) e dell'energia globale dell'evento. Il confronto fra i due gruppi di risultati non è immediato; in particolare per ricavare dalla seconda serie di dati l'intensità verticale delle due componenti occorre conoscere la distribuzione zenitale della componente generatrice e la sezione d'urto che lega l'energia del primario con quella globale dell'evento. Poichè sia la distribuzione zenitale che la sezione d'urto sono praticamente incognite, sembra più ragionevole per il momento fissare l'attenzione sul primo gruppo di risultati e valersi del secondo solo per una stima del rapporto protoni-neutroni, nell'ipotesi abbastanza attendibile che su tale rapporto non influisca nè il passaggio dall'intensità integrata a quella verticale, nè una eventuale dipendenza della sezione d'urto per produzione di eventi nucleari dallo stato di carica del nucleone

responsabile. È però necessario fare ancora una riserva sul valore del rapporto protone-neutroni. Il valore che segue dalle osservazioni delle lastre riguarda il rapporto tra il numero di eventi nucleari prodotti da protoni di energia superiore a 400 MeV ed il numero di eventi prodotti da protoni di energia inferiore (non individuabili come primari) e dai neutroni di qualunque

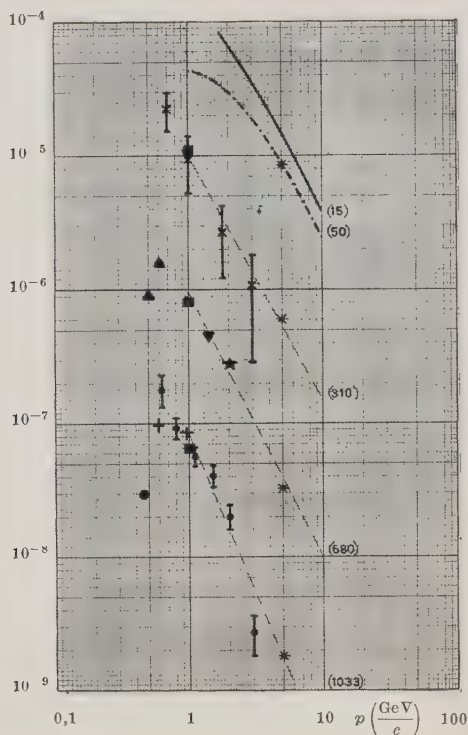


Fig. 1. Spettro differenziale in momento dei protoni [ $\text{cm}^2 \text{s}^{-1} \text{sterad}^{-1} (\text{MeV}/c)^{-1}$ ].

I numeri in parentesi indicano le quote in  $\text{gcm}^2$ . ★ ALICHANIAN (1948). ✕ ANDERSON (1949). --- CAMERINI (1951). ■ CONVERSI (1950). ▼ GREGORY (1951). ▲ MILLER (1950). + PETROU (1950). ● ROCHESTER (1940). ⊕ WILSON (1951). — WINCKLER (1950); \* Calcolato dai valori di WINCKLER.

energia. Questo rapporto sarebbe uguale al rapporto fra le intensità integrate se la sezione d'urto per produzione di eventi nucleari fosse non solo indipendente dallo stato di carica del primario, ma anche dall'energia, poichè nel confronto entrano componenti con energie medie diverse. Ricordiamo che il rap-



porto così definito si aggira sperimentalmente nella media atmosfera intorno al valore 0,17 (3).

I dati sull'intensità verticale della componente protonica sono raccolti in fig. 1. Il primo spettro a partire dall'alto è quello dedotto dalle misure del flusso primario a varie latitudini raccolta da WINCKLER (4); il valore per  $pc = 5$  GeV è stato ridotto con un cammino di assorbimento di  $125 \text{ g cm}^{-2}$  e un cammino d'urto di  $85 \text{ g cm}^{-2}$  per tutte le quote relative agli spettri successivi. Segue lo spettro della scuola di Bristol (5) a  $50 \text{ g cm}^{-2}$  ottenuto dall'esame diretto dell'energia delle particelle cariche che producono interazioni nucleari nell'ipotesi della costanza della sezione d'urto; esso rappresenta a stretto rigore l'intensità integrata piuttosto che l'intensità verticale, ma riteniamo che la sua inclusione abbia ugualmente significato. Questo è stato normalizzato sul punto a  $pc = 5$  GeV. Il fattore di riduzione rispetto allo spettro primario per il detto punto  $pc = 5$  GeV è stato calcolato combinando lo spettro a  $50 \text{ g cm}^{-2}$  come costituito in parte da protoni primari, sfuggiti alle collisioni anelastiche ( $\exp[-t/A]$  con  $A = 85 \text{ g cm}^{-2}$  cammino libero medio) più il contributo proveniente dagli urti anelastici  $[(1/2)(\exp[-t/L] - \exp[-t/A])]$  con  $L = 125 \text{ g cm}^{-2}$  cammino di assorbimento globale della nucleonica in zona anelastica].

Lo spettro a  $310 \text{ g cm}^{-2}$  si basa sulle determinazioni in camera di Wilson di ANDERSON (6), come riportati da WILSON (7), e sul valore che per tale quota si ottiene dalla legge di crescita stabilita da CONVERSI (8) con metodo di anticoincidenze.

Lo spettro a  $680 \text{ g cm}^{-2}$  si basa su misure di MILLER (9) e GREGORY (10) in camera di Wilson, su un punto dedotto da una misura integrale di ALIKANIAN (11) con contatori, su un punto fornito dalle misure di CONVERSI.

Lo spettro a livello del mare consta essenzialmente dalle recenti misure di WILSON (7), con in più due punti ridotti al livello del mare delle misure ori-

(3) N. PAGE: *Proc. Phys. Soc.*, A **63**, 250 (1950); R. H. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. HEITLER, D. T. KING e C. F. POWELL: *Phil. Mag.*, **40**, 862 (1949).

(4) J. R. WINCKLER, S. STIX, K. DWIGHT e R. SABIN: *Phys. Rev.*, **79**, 656 (1950); vedi CAMERINI *et alia*s.

(5) Comunicazione privata.

(6) R. V. ADAMS, C. D. ANDERSON, P. E. LLOYD, R. R. RAU e R. C. SAXENA: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 334 (1948).

(7) M. G. MYLROI e J. G. WILSON: *Proc. Phys. Soc.*, **64**, 404 (1951).

(8) M. CONVERSI: *Phys. Rev.*, **79**, 749 (1950).

(9) C. E. MILLER, J. E. HENDERSON, D. S. POTTER, J. TODD e A. W. WOTRING: *Phys. Rev.*, **79**, 459 (1950).

(10) B. P. GREGORY e J. TINLOT: *Phys. Rev.*, **81**, 667 (1951).

(11) R. ALIKANIAN e A. F. WEISSENBERG: *Exp. Theor. Phys. USSR*, **18**, 673 (1948).

ginali di PEYRON <sup>(12)</sup> a  $930 \text{ g cm}^{-2}$  ed un valore dovuto ancora a CONVERSI per  $pc = 1 \text{ GeV}$ . È da notare la notevole regolarità dell'andamento di questi spettri alle varie quote, pur essendo ottenuti da misure fatte con metodi molto diversi. Il tratteggio sugli spettri a  $1033$ ,  $680$  e  $310 \text{ g cm}^{-2}$  ha puramente la funzione di legare i punti relativi ad una stessa quota, e non deve pertanto considerarsi decisivo agli effetti della pendenza degli spettri.

## 2. - Sorgenti della componente nucleonica.

È opportuno nella trattazione della diffusione della componente nucleonica considerare la componente di media e bassa energia, al pari, ad esempio, della componente mesonica, come secondaria della nucleonica di alta energia. Pertanto tale componente si potrà immaginare generata da una sorgente distribuita lungo l'atmosfera. Conosciamo di questa sorgente la legge di variazione con l'altezza attraverso le esperienze di crescita dei mesoni lenti <sup>(13)</sup>, legge che è resa scegliendo una dipendenza esponenziale regolata da un cammino di assorbimento di  $125 \text{ g cm}^{-2}$ . Poichè i nucleoni originano negli stessi eventi anelastici che danno luogo ai mesoni, manterremo tale dipendenza con l'altezza anche per la componente in esame. Per quanto riguarda la dipendenza energetica ci riferiremo allo spettro differenziale delle particelle prodotte negli eventi nucleari in lastre fotografiche determinato dal gruppo di Bristol <sup>(14)</sup>. La scelta sarebbe soddisfacente se le particelle osservate provenissero tutte da eventi radiativi; in realtà è presumibile che una parte degli eventi si riferisca a semplici attraversamenti dei nuclei con perdite dovute a puro frenamento in materia nucleare. Bisogna ancora aggiungere che gli eventi nucleari segnalati nelle lastre fotografiche si riferiscono, in parte, a nuclei pesanti, mentre i nuclei d'aria sono nuclei leggeri. D'altra parte il problema di correggere lo spettro si presenta troppo incerto, e noi lo useremo nella speranza che lo spettro effettivo non differisca notevolmente nella forma. Verso le alte energie l'andamento permette di prevederne il prolungamento con una legge del tipo  $E^{-2.5}$ , che è quanto ci si può attendere in base ad altre considerazioni. Alle basse energie invece bisogna introdurre un grosso fattore correttivo, poichè, essendo nostro intendimento studiare la propagazione verticale, il dato che interessa è il numero di particelle per unità di angolo solido, e le particelle di bassa energia hanno una distribuzione angolare molto più larga di quella delle particelle veloci. La correzione è molto arbitraria e consiste essenzialmente

<sup>(12)</sup> C. PEYRON e A. LAGARRIGUE: *Journ. de Phys. et Rad.*, **11**, 666 (1950).

<sup>(13)</sup> M. SANDS: *Phys. Rev.*, **77**, 180 (1950); J. TINLOT: *Phys. Rev.*, **74**, 1197 (1948).

<sup>(14)</sup> U. CAMERINI, P. H. FOWLER, W. O. LOCK e H. MUIRHEAD: *Phyl. Mag.*, **41**,

nel ridurre l'intensità delle particelle di 100 MeV per un fattore  $2\pi$ , in modo che lo spettro corretto si possa rappresentare con la legge (energie in GeV)

$$(1) \quad F(E) dE = \frac{A}{(E-B)^\gamma} dE,$$

dove  $\gamma = 2,5$ ,  $B = 0,2$  ed  $E$  è l'energia totale.

Il considerare la sorgente dei nucleoni localizzata negli urti radiativi è sufficiente per la trattazione del problema nella bassa atmosfera, mentre all'aumentare della quota aumenta l'importanza di un'altra sorgente, precisamente quella parte dello spettro primario che penetra nell'atmosfera venendo assorbita per urti elastici e per ionizzazione. Questo avviene solo per latitudini settentrionali dove il taglio del campo magnetico terrestre è confrontabile con l'energia critica alla quale le probabilità di urto elastico e anelastico sono uguali (cfr. n. 4). Per questa ultima sorgente ci serviremo dello spettro di Winkler, rappresentabile con la legge

$$(2) \quad F_W(E) dE = \frac{0,38}{E^2} dE \quad (\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sterad}^{-1} \text{ GeV}^{-1});$$

l'uso di questo spettro intorno al GeV non è senza qualche riserva, in quanto dedotto da uno spettro integrale non corretto per effetti secondari.

### 3. — Perdite in materia nucleare.

Per descrivere la propagazione dei nucleoni si può ricorrere a due differenti modelli, in cui le perdite di energia in un singolo attraversamento nucleare ed il cammino di collisione hanno andamenti differenti. Un modello ancorato allo schema della fisica nucleare valida per le basse energie <sup>(15)</sup> si basa sull'assumere le perdite in materia nucleare variabili con l'energia secondo la legge

$$(3) \quad \alpha(E) = \alpha_0 \frac{E^2}{E^2 - M^2},$$

analoga a quella delle perdite di energia per ionizzazione, a parte il fattore logaritmico tipo delle interazioni a lungo raggio. La (3) si deduce partendo dalla sezione d'urto elementare nucleone-nucleone ed ammettendo che in materia nucleare i processi d'urto si possono ridurre ad una successione di urti elementari indipendenti, vale a dire escludendo le forze a più corpi. Bisogna però osservare che l'analogia della (3) con la legge che regola le perdite per ionizzazione è in realtà puramente formale, in quanto in tutto l'intervallo ener-

<sup>(15)</sup> L. ROSENFELD: *Nuclear Forces*. Publ.

getico in cui ha senso applicare la (3), la cessione di energia in ogni singola collisione sarà abbastanza elevata e pertanto nelle perdite globali si possono avere delle forti fluttuazioni, cosa che non è verificata per la ordinaria ionizzazione.

La sezione d'urto nucleone-nucleone decresce con la stessa legge (3) delle perdite per tendere ad un valore asintotico <sup>(16)</sup> di  $4,15 \cdot 10^{-26}$ , e nell'intervallo di energie che interessa la sezione d'urto nucleone-nucleone risulta praticamente quella geometrica.

Il valore di  $\alpha_0$ , che abbiamo supposto costante, è in realtà tale solo per potenziali che hanno ovunque derivata finita; usando invece potenziali di tipo mesonico con una singolarità nell'origine,  $\alpha_0$  è funzione crescente dell'energia. Sappiamo che per rendere conto della sezione d'urto ( $p-p$ ) ad alte energie sia con potenziale statico <sup>(17)</sup>, sia con potenziale dipendente dalla velocità <sup>(18)</sup>, bisogna introdurre singolarità di ordine superiore a quella del mesonico. Poiché però tale scelta si presenta tuttora largamente arbitraria, è difficile dare l'effettivo andamento di  $\alpha_0$ .

Nell'altro modello, che si può dedurre dai dati sperimentali finora noti sull'attraversamento da parte di protoni veloci di vari tipi di nuclei <sup>(19)</sup>, si osserva che per energie delle particelle superiori ai 150 MeV l'energia perduta nell'urto con un nucleo leggero, almeno nel caso in cui si ha cambiamento di stato, la energia media perduta risulta costante. Per quanto riguarda poi la sezione d'urto nucleone-nucleone si nota una rapida diminuzione intorno ai 100 MeV, praticamente indipendente dal tipo di nucleo, e la tendenza ad assumere un valore costante oltre i 150 MeV. Dal confronto fra i due modelli non si può attualmente ancora asserire se vi siano o meno delle incompatibilità, poichè con una opportuna crescita di  $\alpha_0$  è possibile ritrovare le caratteristiche del secondo modello. L'unica ragione di discrepanza potrebbe eventualmente risiedere in un contributo non trascurabile delle forze a più corpi. A solo titolo di confronto abbiamo usato il primo modello nel caso limite di  $\alpha_0$  costante, scegliendo per  $\alpha_0$  il valore di  $8 \cdot 10^{-13}$  MeV cm<sup>1</sup>, suggerito dall'analisi delle stelle prodotte da protoni di 375 MeV nelle emulsioni fotografiche <sup>(20)</sup>.

Con questa scelta le previsioni dei due modelli si equivalgono intorno a 350 MeV.

Per quanto riguarda il secondo modello il valore costante della perdita nell'attraversamento di un nucleo d'aria si può fissare a partire dal valore

<sup>(16)</sup> G. C. J. ZWANIKKEN: *Physica*, **14**, 530 (1948).

<sup>(17)</sup> R. JASTROW: *Phys. Rev.*, **81**, 165 (1951).

<sup>(18)</sup> K. M. CASE e A. PAIS: *Phys. Rev.*, **80**, 203 (1950).

<sup>(19)</sup> J. DE JUREN: *Phys. Rev.*, **80**, 27 (1950).

<sup>(20)</sup> G. BERNARDINI, E. T. BOOTH e S. J. LINDENBAUM e *Phys. Rev.*, **80**, 905 (1950).



sperimentale per il Berillio in 80 MeV. I dati sperimentali arrivano fino ai 300 MeV: per energie superiori conserveremo in mancanza di altre indicazioni questo valore per la perdita.

#### 4. — Cammino d'urto.

Il problema della scelta delle lunghezze di collisione si presenta oggi ancora con molte incertezze, perchè il panorama dei dati sperimentali è limitato essenzialmente ai 350 MeV, mentre la componente in studio interessa un intervallo di energia più esteso. Le determinazioni della sezione d'urto elementare ( $n-p$ ) mostrano che questa sezione non varia di molto fra i 100 e i 300 MeV e in questa stessa regione la sezione d'urto ( $p-p$ ) partendo da un valore nettamente inferiore intorno ai 100 MeV va gradatamente aumentando. Completamente ipotetico è l'andamento di entrambe queste sezioni d'urto dai 300 MeV fino alla zona in cui predominano i fenomeni di generazione dei mesoni. Sembra ragionevole, e non contraddetto dai risultati sperimentali finora noti, ammettere che ad alte energie le due sezioni d'urto ( $n-n$ ) e ( $p-p$ ) tendano alla sezione d'urto ( $n-p$ ) e continuino fino alla zona di produzione di mesoni con un valore vicino a quello che presenta la sezione d'urto ( $n-p$ ) verso i 300 MeV. Questo è dell'ordine di  $4 \cdot 10^{-26}$  cm<sup>2</sup>, compatibile col valore relativo al raggio d'azione delle forze nucleari per un mesone  $\pi$  di massa 276.

È facile calcolare il numero medio di nucleoni incontrati da un nucleone attraversando un spessore  $y$  di materia nucleare, numero che per un nucleo con  $Z = A/2$  vale

$$(4) \quad m(y) = \frac{A}{V} y \left\{ \frac{1}{2} \sigma_{NP} + \frac{1}{2} \sigma \right\},$$

dove con  $\sigma$  indichiamo il valore comune delle sezioni d'urto  $\sigma_{NN}$  e  $\sigma_{PP}$  assumendo come di consueto che sia  $\sigma_{NN} = \sigma_{PP}$ . Il secondo termine, per quanto detto sopra, sembra crescere con l'energia passando da un valore  $(1/4)\sigma_{NP}$  a basse energie fino a raggiungere presumibilmente la sezione d'urto  $\sigma_{NP}$  per qualche centinaio di MeV. Il numero medio di nucleoni incontrati da un nucleo di Azoto varia pertanto fra 0,8 e 1,6. Si può così prevedere che, nell'ipotesi che il nucleo si possa trattare come un gas di particelle prive di correlazioni spaziali, il numero effettivo di nucleoni incontrati fluttua intorno al valore medio con una dipendenza poissoniana. In tal caso la sezione efficace per eccitazione del nucleo si può scrivere nella forma <sup>(21)</sup>

$$(5) \quad \sigma_{ecc} = \frac{\pi}{2} \int_0^{2r_A} \{1 - \exp[-m(y)]\} y dy,$$

dove con  $r_A$  si è indicato il raggio del nucleo di peso atomico  $A$ .

<sup>(21)</sup> S. FERNBACH, R. SERBER e T. B. TAYLOR: *Phys. Rev.*, **75**, 1352 (1949).

Per l'Azoto, nei casi estremi considerati la  $\sigma_{\text{ecc}}$  risulta rispettivamente 0,61 e 0,77 della sezione d'urto geometrica, i relativi cammini d'urto di 110 e 85 g cm<sup>-2</sup>. Essendo però il primo valore limitato ad un intervallo energetico di poco interesse per il nostro problema, faremo uso in seguito del secondo valore.

Infine va tenuto presente che per gli scopi del presente lavoro è necessario distinguere nella sezione d'urto totale nucleone-nucleone la parte dovuta ai processi elastici da quella dovuta alla generazione di mesoni. Della sezione d'urto anelastica, dal punto di vista sperimentale, si conosce solo il valore alla soglia, e per energie molto superiori al GeV gli attuali dati sulle interazioni nucleari prodotte dai raggi cosmici non sono in contraddizione con un valore dell'ordine di  $4 \cdot 10^{-26}$  cm<sup>2</sup>. Noi separeremo il contributo elastico alla sezione d'urto totale da quello anelastico usando i risultati della recente teoria di FERMI<sup>(22)</sup>. Vi sono attualmente varie indicazioni di carattere sperimentale<sup>(5)</sup> che tendono a mostrare come l'uso di una funzione di elasticità suggerita dalla teoria di Fermi rappresenti una buona approssimazione. Una semplice rappresentazione analitica di questa funzione è

$$(6) \quad \varphi(R) = \frac{1}{1 + (R/R_0)^3},$$

dove  $\varphi(R)$  dà la probabilità che, quando un nucleone di range residuo  $R$  compie un urto elementare, tale urto sia elastico. Con  $R_0 = 480$  g cm<sup>-2</sup> la funzione  $\varphi(R)$  assume il valore 1/2 per un'energia cinetica del nucleone 1,25 GeV.

## 5. - Equazione di diffusione della componente nucleonica.

Come già detto, le equazioni che scriveremo per il modello a perdite costanti sono equazioni unidimensionali, perchè riteniamo che il dato sperimentale di più immediato confronto sia costituito dall'intensità verticale dei protoni alle varie quote. Indicheremo con  $E$  l'energia totale dei nucleoni e descriveremo la perdita di energia per ionizzazione per i protoni con la legge ( $M = Mc^2$ )

$$(7) \quad \beta(E) = \beta_0 \frac{E^2}{E^2 - M^2}, \quad (\beta_0 = 2 \text{ MeV} \cdot \text{g cm}^{-2}),$$

che approssima bene l'andamento effettivo delle perdite in tutto l'intervallo energetico che ci interessa. Indicheremo con  $\Delta$  il cammino d'urto, che per quanto detto fisseremo in 85 g cm<sup>-2</sup>, con  $L$  il cammino di assorbimento, che

<sup>(22)</sup> E. FERMI: *Prog. Theor. Phys.*, **5**, 570 (1950).

caratterizza la sorgente, già fissato in  $125 \text{ g cm}^{-2}$ , con  $\eta$  (80 MeV) la perdita media di un nucleone nell'attraversamento di un nucleo d'aria. Per tener conto dei cambiamenti di stato di carica dei nucleoni, indicheremo con  $\bar{q}$  e  $1 - \bar{q}$  rispettivamente le probabilità di scambio o di permanenza nel proprio stato di carica di un nucleone in un attraversamento nucleare. Se con  $N(E, t) dE$  e  $P(E, t) dE$  indichiamo infine rispettivamente gli spettri differenziali dei neutroni e dei protoni a quota  $t$ , avremo il sistema di equazioni

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial N(E, t)}{\partial t} = -\frac{N(E, t)}{\Lambda} + \frac{1 - \bar{q}}{\Lambda} N(E + \eta, t) + \frac{\bar{q}}{\Lambda} P(E + \eta, t) + \frac{S(E, t)}{\Lambda} \\ \frac{\partial P(E, t)}{\partial t} = \frac{\partial[\beta(E)P(E, t)]}{\partial E} - \frac{P(E, t)}{\Lambda} + \frac{1 - \bar{q}}{\Lambda} P(E + \eta, t) + \\ + \frac{\bar{q}}{\Lambda} N(E + \eta, t) + \frac{S(E, t)}{\Lambda} \end{cases}$$

Con  $S(E, t)$  indichiamo il termine sorgente, la cui espressione esplicita è

$$(9) \quad S(E, t) = A \frac{\exp[-t/L]}{(E - 0,2)^{2,5}}.$$

Queste equazioni sono valide per la componente secondaria che proviene dagli urti anelastici. Per descrivere la penetrazione dell'atmosfera della componente che non proviene dagli urti anelastici, valgono le stesse equazioni senza i termini di sorgente e con condizione iniziale per i protoni lo spettro primario di Winkler. Le probabilità  $\bar{q}$  e  $1 - \bar{q}$  dipendono dall'energia poichè contengono la funzione di Fermi. Infatti, se  $\bar{q}$  rappresenta la probabilità di scambio di stato di carica in un urto elementare, sarà

$$(10) \quad \bar{q} = \sum_1^{\infty} p(n) \varphi^n(E) q_n, \quad 1 - \bar{q} = \sum_1^{\infty} p(n) \varphi^n(E) [1 - q_n],$$

dove  $p(n)$  è la probabilità che il nucleone compia  $n$  urti e  $q_n$  la relativa probabilità di scambio. Nelle nostre approssimazioni la  $p(n)$  si può calcolare con la formula di Poisson usando come numero medio di urti il valore dato dalla (4) per  $y = (4/3)r_A$  ( $r_A = 1,37A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ ). Per  $q_n$  è facile vedere che, se la sezione d'urto nucleone-nucleone non dipende dallo stato di carica dei sistemi urtanti, vale la relazione

$$(11) \quad q_n = 1 - \sum_0^{\bar{k}} \binom{n}{2k} (1 - q)^{n-2k} q^{2k},$$

dove  $\bar{k} = n/2$  per  $n$  pari,  $\bar{k} = (n-1)/2$  per  $n$  dispari.

Il sistema di equazioni (8) si può risolvere col metodo delle approssimazioni successive ricorrendo ad una funzione tentativo del rapporto fra protoni e neutroni, che indicheremo con

$$(12) \quad \varrho(E) = \frac{P(E, t)}{\bar{N}(E, t)}.$$

La funzione  $\varrho(E)$ , almeno nella media e bassa atmosfera, parte da zero per energie molto basse e tende al valore uno col crescere dell'energia; abbiamo pertanto pensato di esprimerla in approssimazione zero con l'espressione  $\beta_0/\beta(E)$ . In tale approssimazione e per le quote considerate è lecito trascurare, dato l'equilibrio fra le due componenti, una eventuale debole dipendenza da  $t$  del rapporto (12). Con la posizione (12), indicando con

$$(13) \quad \sigma_N(E) = \overline{1-q} + \bar{q}\varrho(E), \quad \sigma_P = (\overline{1-q})\varrho(E) + \bar{q},$$

il sistema (8) si riduce al seguente

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial N(E, t)}{\partial t} &= -\frac{N(E)}{A} + \frac{\sigma_N(E + \eta)}{A} N(E + \eta, t) + \frac{S(E, t)}{A} \\ \frac{\partial P(E, t)}{\partial t} &= \frac{\partial[\beta(E)P(E, t)]}{\partial E} - \frac{P(E, t)}{A} + \\ &\quad + \frac{\sigma_P(E + \eta)}{A} N(E + \eta, t) + \frac{S(E, t)}{A} \end{aligned} \right.$$

In questa forma la prima delle (14) si può risolvere con un metodo (Appendice A) fisicamente equivalente a quello delle collisioni successive. La soluzione così ottenuta entra come termine noto nella seconda delle (14), e permette di ricavare un primo valore approssimato per  $P(E, t)$  (Appendice B), col quale si può avere un nuovo rapporto  $\varrho(E)$ , che nella zona in cui le componenti sono in equilibrio sarà una funzione lenta della quota, come suggerisce l'assorbimento regolare dello spettro dei protoni. Si potrà così passare alle approssimazioni successive.

La soluzione di approssimazione zero per i neutroni, che si scrive

$$(15) \quad N(E, t) = \sum_0^{\infty} \frac{[\sigma_N(E + (n+1)\eta)]^{(E-M)/\eta+n}}{[\sigma_N(E + \eta)]^{(E-M)/\eta}} \left(\frac{\mathcal{L}}{A}\right)^{n+1} S(E + n\eta, t) \frac{(n, t/\mathcal{L})!}{(n, \infty)!},$$

dove  $\mathcal{L} = LA/(L - A)$ , si presta per una prima valutazione della crescita relativa nella media e bassa atmosfera. A rigore bisognerebbe tener conto anche del contributo dei nucleoni primari frenati elasticamente, ma poichè ci limiteremo a presentare i risultati di approssimazione zero per la bassa atmosfera,



non entreremo nei dettagli del calcolo di questa componente. La soluzione delle equazioni prive di sorgenti si ottiene col metodo sviluppato in Appendice e verrà trattata per esteso in un prossimo lavoro.

## 6. - Confronto con i dati sperimentali e conclusione.

Mediante la (15) abbiamo calcolato il fattore di crescita per i neutroni fra 1033 e 680  $\text{g cm}^{-2}$  per avere un'idea della bontà delle approssimazioni fatte. Sebbene questi dati si riferiscano ai neutroni, noi pensiamo che essi siano ugualmente significativi in quanto le due componenti sono in equilibrio grazie ai termini di scambio, il cui contributo, come risulta dal calcolo, nella bassa atmosfera è molto superiore a quello diretto della sorgente.

I cammini di assorbimenti per energie di 400, 600 e 800 MeV sono rispettivamente di 145, 140 e 135  $\text{g cm}^{-2}$ , che portano a dei fattori di crescita in ottimo accordo con quelli ottenuti sperimentalmente. Lo stesso calcolo è stato fatto per il modello con perdite variabili, dove per i precedenti valori dell'energia i cammini di assorbimento sono rispettivamente 137, 128 e 126  $\text{g cm}^{-2}$ . Le crescite in questo caso convergono più rapidamente verso il valore relativo a 125  $\text{g cm}^{-2}$ , caratteristico della sorgente.

Le equazioni di diffusione con perdite variabili conviene risolverle passando dalle energie ai range; il procedimento è perfettamente analogo a quello usato per le equazioni in energia e per brevità non abbiamo riportato le soluzioni finali.

Nel precedente confronto ci siamo limitati ad energie di 400 MeV, in quanto per energie inferiori i risultati andrebbero discussi tenendo presente che negli attraversamenti nucleari si ha un notevole sparpagliamento angolare. Questa questione, come pure un più completo confronto con gli spettri sperimentali dei protoni alle varie quote sono allo studio.

Nei numeri precedenti abbiamo discusso le questioni più importanti relative alla diffusione della componente nucleonica nell'atmosfera, di cui si sono date le equazioni in approssimazione unidimensionale.

Dai risultati di approssimazione zero per la crescita dei neutroni nella bassa atmosfera ci sembra che il quadro prospettato sia nelle sue linee essenziali abbastanza soddisfacente. In molti casi il valore dei parametri usati è il risultato di estrapolazioni notevoli, se pur in qualche modo giustificate dal non aver altro criterio di scelta.

Ringraziamo il prof. BRUNO ROSSI, il cui consiglio è stato essenziale per lo sviluppo di questo lavoro.

## APPENDICE A

Avendo la soluzione della prima delle (14) per uno spettro iniziale monocromatico di nucleoni, vale a dire con la condizione iniziale

$$(I) \quad N(E, 0) = \delta(E - E_0),$$

la soluzione generale per uno spettro qualunque si otterrà per semplice sovrapposizione.

Posto allora

$$(II) \quad \mathcal{L}(E, \lambda) = \int_0^{\infty} \exp[-\lambda t] N(E, t) dt,$$

e per brevità  $a = 1/A$  e  $b = \sigma_N(E + \eta)A$ , l'equazione (14) in  $N(E, t)$  diventa

$$(III) \quad \frac{(a + \lambda)}{b} \mathcal{L}(E, \lambda) = \mathcal{L}(E + \eta, \lambda),$$

avente come soluzione la ( $W = E - M$ )

$$(IV) \quad \mathcal{L}(E, \lambda) = f(E, \lambda) \left(\frac{1}{b}\right)^{W/\eta} \exp\left[\frac{W}{\eta} \lg(a + \lambda)\right],$$

dove  $f(E, \lambda)$  è una funzione che soddisfa la condizione  $f(E, \lambda) = f(E + \eta, \lambda)$ , e la cui forma verrà fissata imponendo per  $t = 0$  la condizione (I). Si ha pertanto

$$(V) \quad N(E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(E, \lambda) \left(\frac{1}{b}\right)^{W/\eta} \exp\left[\frac{W}{\eta} \lg(a + \lambda) + \lambda t\right] d\lambda,$$

con  $C$  cammino di integrazione nel piano complesso  $\lambda$ . Convieni<sup>(23)</sup> ora operare il cambiamento di coordinate

$$(VI) \quad \lambda = e^\mu - a,$$

per cui con la posizione

$$(VII) \quad f(E, \lambda) = \varphi(E, \mu) \exp\left[-\mu \frac{W_0}{\eta}\right],$$

dove  $\varphi(E, \mu) = \varphi(E + \eta, \mu)$ , la (V) diventa

$$(VIII) \quad N(E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \varphi(E, \mu) \left(\frac{1}{b}\right)^{W/\eta} \exp\left[\frac{\mu}{\eta} (E - E_0) + (e^\mu - a)t\right] d\mu,$$

con  $C'$  trasformata di  $C$  nel piano complesso  $\mu$ .

Di qui si vede che ponendo

$$(IX) \quad \varphi(E, \mu) = \left[ \frac{\sigma_N(E_0 + \eta)}{A} \right]^{W_0/\eta},$$

<sup>(23)</sup> F. J. MILFORD e L. L. FOLDY: *Phys. Rev.*, **81**, 13 (1951).

e scegliendo il cammino di integrazione lungo l'asse immaginario da  $-i\infty$  a  $+i\infty$ , la (VIII) soddisfa per  $t = 0$ , ricordando la rappresentazione integrale della funzione  $\delta$  di Dirac, la condizione iniziale (I).

Concludendo, possiamo scrivere

$$(X) \quad N(E_0, E, t) = \exp \left[ -\frac{t}{\Lambda} \frac{[\sigma_N(E_0 + \eta)]^{W_0/\eta}}{[\sigma_N(E + \eta)]^{W/\eta}} \left( \frac{1}{\Lambda} \right)^{(E_0 - E)/\eta} \right] \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp \left[ \frac{\mu}{\eta} (E - E_0) + t e^\mu \right] d\mu.$$

Sviluppando ora  $\exp [te^\mu]$  in serie di potenze ed integrando termine a termine si ha infine la soluzione

$$(XI) \quad N(E_0, E, t) = \exp \left[ -\frac{t}{\Lambda} \frac{[\sigma_N(E_0 + \eta)]^{W_0/\eta}}{[\sigma_N(E + \eta)]^{W/\eta}} \left( \frac{1}{\Lambda} \right)^{(E_0 - E)/\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \delta \left( \frac{E_0 - E}{\eta} - n \right) \right].$$

Per  $E = E_0$  la (XI) dà  $N(E_0, E_0, t) = \exp [-t/\Lambda]$ , esprime cioè la probabilità che il nucleone « iniziale »  $E_0$  raggiunga la profondità  $t$  senza avere urtato.

Se in luogo della condizione iniziale (I) si ha uno spettro distribuito nell'atmosfera con la legge

$$(XII) \quad S(E_0, \tau) d\tau dE_0 = A \frac{\exp [-\tau/L]}{(E_0 - B)^y} dE_0 d\tau,$$

sarà

$$(XIII) \quad N(E, t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\Lambda} \int_{E_0}^{\infty} N(E_0, E, t - \tau) S(E_0, \tau) dE_0 = \int_0^t N(E, t - \tau) d\tau.$$

Data la presenza della funzione  $\delta$  le integrazioni sono immediate, ed il risultato è la (15) del n. 6, dove si è posto

$$(XIV) \quad (n, y)! = \int_0^y e^{-x} x^n dx.$$

## APPENDICE B

Qualora si debba tener conto della variabilità delle perdite di energia per ionizzazione  $\beta(E)$ , conviene passare dalle energie ai range. Introduciamo per questo il range  $r(\eta)$  che in aria corrisponde alla perdita media costante di energia  $\eta$  in materia nucleare

$$(I) \quad r(\eta) = \int_{E-\eta}^E \frac{dE}{\beta(E)} = \frac{\eta}{\beta_0} \left[ 1 - \frac{M^2}{(E - \eta)E} \right],$$

che, essendo sempre  $\eta \neq E$ , si può esprimere in funzione del range

$$(II) \quad R(E) = \int_M^E \frac{dE}{\beta(E)} = \frac{1}{\beta_0} \frac{(E-M)^2}{E}$$

mediante la

$$(III) \quad r(R) = \frac{2\eta}{\beta_0} \left[ 1 - \frac{\beta_0 R + 2M}{\beta_0 R + 2M + \sqrt{(\beta_0 R + 2M)^2 - 4M^2}} \right].$$

Moltiplicando ora la seconda delle (14) per  $\beta(E)$  e ricordando la relazione  $P(R, t) = \beta(E)P(E, t)$  ed analogamente per la sorgente, si ha l'equazione

$$(IV) \quad \frac{\partial P(R, t)}{\partial t} = - \frac{\partial P(R, t)}{\partial R} - \frac{P(R, t)}{A} + \\ + \frac{\sigma_P[R + r(R)]}{A} [1 + r'(R)] N[R + r(R), t] + \frac{S(R, t)}{A},$$

dove  $r'(R) = dr(R)/dR$ . Questa equazione si integra facilmente e si ottiene

$$(V) \quad P(R, t) = \frac{1}{A} \int_0^t \exp \left[ - \frac{x}{A} \right] \sigma_P[R + x + r(R + x)] [1 + r'(R + x)] \times \\ \times N[R + x + r(R + x), t - x] dx + \frac{1}{A} \int_0^t \exp \left[ - \frac{x}{A} \right] S[R + x, t - x] dx.$$

Con perdite costanti, cioè  $\beta(E) = \beta_0$  e quindi  $r(R) = \eta/\beta_0$ , la precedente soluzione si semplifica, e tradotta in energia si scrive

$$(VI) \quad P(E, t) = \frac{1}{A} \int_0^t \exp \left[ - \frac{x}{A} \right] \times \\ \times \{ \sigma_P(E + \beta_0 x + \eta) N(E + \beta_0 x + \eta, t - x) + S(E_0 + \beta_0 x, t - x) \} dx.$$

Per energie abbastanza elevate la (VI) può essere usata in luogo della (V). Osserviamo infine che qualora si assuma che le perdite in materia nucleare in luogo di essere costanti seguano la legge (3), conviene senz'altro riscrivere le equazioni di diffusione (16) in range, tenendo conto che in tal caso  $(\alpha_0/\beta_0)y$  è il range in aria che corrisponde, come perdite di energia, al percorso medio  $y = (4/3)r_A$  in materia nucleare. Così riscritte le equazioni si possono risolvere col metodo indicato, che porta a delle soluzioni analoghe a quelle già incontrate, in particolare nel caso dei protoni meno laboriose e più semplici.



## SUMMARY (\*)

The Authors reconsider the problem of the diffusion of the low energy nucleonic component in the atmosphere, which is described through two distinct equations for protons and neutrons. The absorption mean free path in the low and middle atmosphere is consistent with experience. Authors discuss further experimental data on vertical intensity of protons and different parameters involved in the description of the diffusion of above said components.

---

(\*) *Editor's translation.*

## Un'esperienza mediante reticoli piani per microonde.

L. GRILLINI

*Centro di studio per la Fisica delle Microonde del C.N.R.*

*Istituto di Fisica dell'Università - Firenze*

(ricevuto il 19 Settembre 1951)

**Riassunto.** — Si riferisce, in prima approssimazione, il comportamento all'infinito di reticoli piani per microonde. Lo studio sperimentale ha consentito di tracciare diagrammi concernenti la distribuzione di intensità, relativa alle onde diffratte dei primi ordini, in funzione dell'angolo di incidenza. La distribuzione di intensità cambia in modo cospicuo, qualora si passi da onde incidenti sul reticolo con vettore elettrico normale ai tratti ad onde incidenti sul medesimo con vettore elettrico parallelo ai tratti.

1. — È noto che un reticolo piano rettilineo a fattore di trasmissione periodico, qualora vi incida parallelamente un'onda piana, fornisce un sistema di onde piane, all'emergenza, formante con il reticolo angoli dati dalla relazione:

$$(1) \quad \sin \beta_K = \frac{K\lambda}{a}, \quad (K = 0, \pm 1, \dots),$$

dove con  $a$  si indica il periodo (somma delle larghezze  $a_1$  e  $a_2$  rispettivamente dei tratti trasparenti ed opachi), con  $\lambda$  la lunghezza d'onda della radiazione.

Se sul reticolo incidesse un'onda piana parallela ai tratti e formante un angolo  $\alpha$  con il piano del reticolo, angolo contato positivo nel verso opposto al verso positivo di  $\beta_K$ , come generalmente si conviene, la relazione precedente si trasformerebbe come segue:

$$(2) \quad \sin \beta_K = \frac{K\lambda}{a} - \sin \alpha, \quad (K = 0, \pm 1, \dots).$$

La (2) può fornire solo un numero finito di angoli reali  $\beta_K$  per ogni valore di  $\alpha$ , di  $\lambda$  e di  $a$ ; da un certo  $K$  in poi essi risultano immaginari.

Precisamente gli angoli  $\beta_K$  saranno immaginari quando è:

$$(3) \quad \left| \frac{K\lambda}{a} - \sin \alpha \right| > 1, \quad \dots \alpha < 90^\circ;$$

Assegnati allora i valori di  $\lambda$  e di  $a$ , si può variare opportunamente l'incidenza  $\alpha$  in modo da estinguere ad una ad una le onde diffratte da un lato di quella centrale ( $K=0$ ), poichè i  $\beta_K$  corrispondenti divengono immaginari. Non scompaiono però le onde dello stesso ordine dall'altra parte.

Il fatto che il reticolo costituisce un diaframma periodico basta per assicurare che sul piano di emergenza di esso le ampiezze complesse siano periodiche, con lo stesso periodo. Questo fatto consente di calcolare senza ambiguità gli angoli di diffrazione delle onde piane ordinarie diffratte; restano invece indeterminate le intensità relative delle varie onde diffratte, perchè non si conosce la distribuzione dell'ampiezza sul piano di emergenza del reticolo.

Può suscitare un qualche interesse uno studio sperimentale della distribuzione di potenza all'infinito, distribuzione dovuta ad un reticolo, in funzione dell'angolo di incidenza della radiazione.

Il fenomeno è della classe di quelli di Fraunhofer.

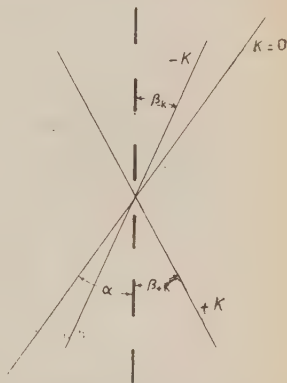


Fig. 1.

2. - È stato utilizzato un banco per microonde, le caratteristiche del quale sono illustrate nella relazione di altre esperienze di ottica elettromagnetica <sup>(1)</sup>.

Il dispositivo sperimentale adottato si presenta come nella fig. 2.

Il generatore  $G$ , per mezzo di uno specchio parabolico, emette onde piane la cui lunghezza d'onda è di 32 mm, modulate a 1 000 Hz (il che consente di poter impiegare in ricezione amplificatori a forte guadagno). Lo specchio ha un diametro di circa 15 lunghezze d'onda.

Il reticolo  $R$  è formato di strisce metalliche alternate con intervalli liberi.

Le onde piane diffratte dal reticolo convergono nel fuoco del paraboloide  $P$  e quindi, a mezzo dell'apertura di un tronco di guida rettangolare, sono inviate nel ricevitore  $A$ .

Il generatore  $G$  resta fisso, mentre il paraboloide ricevente ed il reticolo possono ruotare attorno ad un asse giacente nel piano del reticolo e parallelo ai tratti.

(1) N. CARRARA, P. CHECCUCCI e M. SCHAFFNER: *Alla Frequenza*, 17, 243 (1948).

L'asse di rotazione è anche asse di simmetria del reticolo. Il generatore di onde piane è posto ad una distanza, dal piano reticolare, tale che la radiazione riflessa dalle strisce metalliche non modifica sensibilmente il campo di incidenza.

Il periodo del reticolo, usato per questa esperienza, era compreso entro limiti che consentissero la comparsa di onde piane diffratte solo del primo ordine, per un angolo di incidenza che passava dal valore di  $0^\circ$  a quello massimo di  $30^\circ$ .

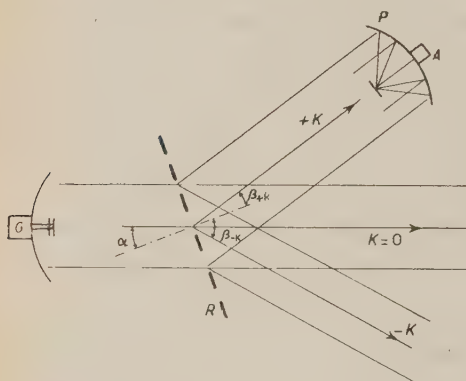


Fig. 2.

Gli schermi usati non consentivano infatti la possibilità di incidenze superiori, in quanto gli effetti dei bordi di questi ultimi sarebbero stati notevoli e avrebbero influenzato le misure di potenza.

Con semplice calcolo, dalla relazione (2) si ottiene che per un periodo tale che sia verificata la disuguaglianza

$$\text{mm } 32 < a < 42 \text{ mm},$$

i requisiti sopra richiesti sono soddisfatti.

Il reticolo impiegato aveva un periodo di 40 mm; il rapporto fra la larghezza del tratto trasparente e quella del tratto riflettente è stato variato di volta in volta per ogni serie di misure.

Il dispositivo consente il tracciamento di diagrammi sulle ascisse dei quali sono riportate le misure degli angoli di incidenza, sulle ordinate i valori rilevati sperimentalmente per la potenza  $W$  delle onde diffratte di ordine 0 e  $\pm 1$ , lungo le direzioni di propagazione delle medesime.

L'installazione sperimentale attuale non consente misure angolari di precisione, i fenomeni in oggetto però presentano differenze così rilevanti, tali da non ammettere dubbi nella loro interpretazione.

Variando opportunamente la sensibilità dell'apparato ricevente, è possibile mantenere costante la lettura di una delle potenze delle tre onde piane diffratte dal reticolo. Mantenendo, ad esempio, costante quella dell'onda centrale ( $K = 0$ ) potrà determinarsi quindi, per ogni angolo di incidenza, il rapporto di potenza fra l'onda centrale e le onde diffratte laterali.

3. - I diagrammi delle figg. 3, 4, 5, illustrano come varia il rapporto di potenza delle onde diffratte di ordine  $+1$  e  $-1$  rispetto a quella di ordine 0.

Per un'incidenza di circa  $11^\circ$  l'onda di ordine  $K = -1$  si estingue con-



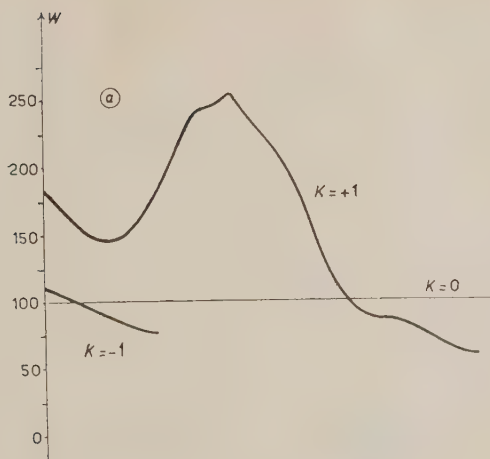


Fig. 3a. -  $a_1 = 15$  mm,  $a_2 = 25$  mm, vettore elettrico normale ai tratti del reticolo.

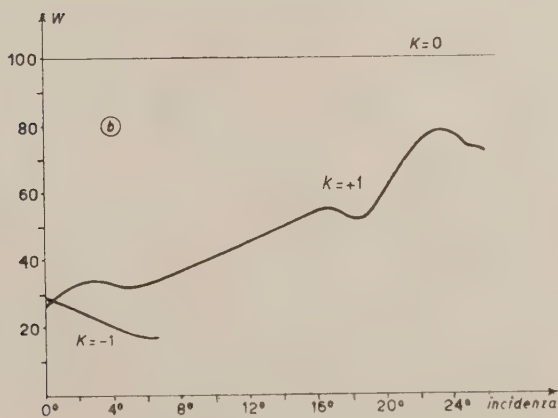


Fig. 3b. -  $a_1 = 15$  mm,  $a_2 = 25$  mm, vettore elettrico parallelo ai tratti del reticolo.

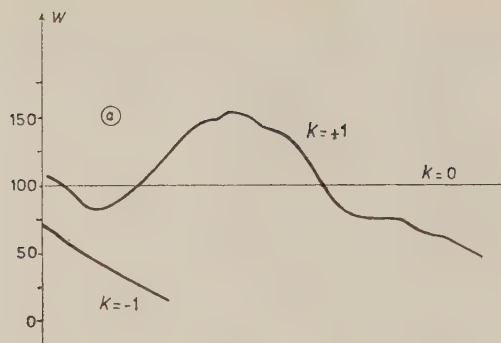


Fig. 4a. -  $a_1 = 20$  mm,  $a_2 = 20$  mm, vettore elettrico normale ai tratti del reticolo.

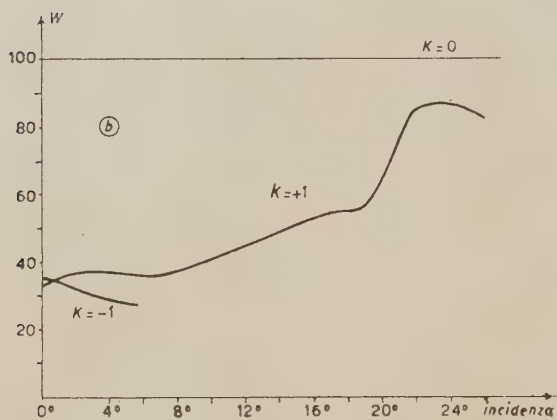


Fig. 4b. -  $a_1 = 20$  mm,  $a_2 = 20$  mm, vettore elettrico parallelo ai tratti del reticolo.

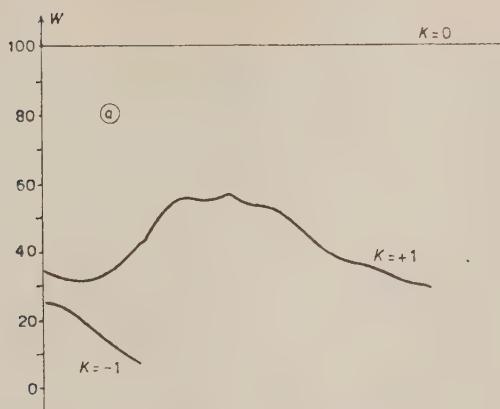


Fig. 5a. -  $a_1 = 25$  mm,  $a_2 = 15$  mm, vettore elettrico normale ai tratti del reticolo.

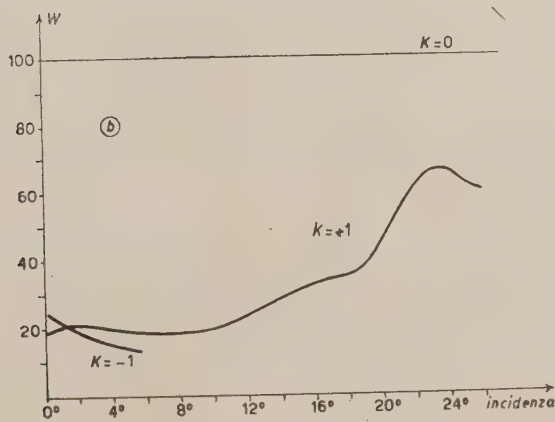


Fig. 5b. -  $a_1 = 25$  mm,  $a_2 = 15$  mm, vettore elettrico parallelo ai tratti del reticolo.

formemente alla formula (2). Era già noto in ottica che il progressivo estinguersi di un'onda diffratta di un dato ordine portava, di conseguenza, l'esaltazione dell'onda dello stesso ordine dalla parte opposta di quella centrale <sup>(2)</sup> <sup>(3)</sup> <sup>(4)</sup>.

Le prove sperimentali eseguite pongono in rilievo questo comportamento, che si verifica, sia quando il vettore elettrico dell'onda incidente, polarizzata rettilineamente, è parallelo ai tratti del reticolo, sia quando lo stesso vettore elettrico è normale ai tratti.

Le figg. 3, 4, 5, sono relative ai reticoli il cui periodo è di 40 mm e il rapporto della larghezza del tratto libero e quella del tratto riflettente è nell'ordine  $3/5$ ,  $1$ ,  $5/3$ .

Le lettere *a*, *b*, separano il caso di misure eseguite con vettore elettrico normale ai tratti da quelle eseguite invece con vettore elettrico parallelo ai tratti.

Distinguendo i due casi è stato notato un comportamento del rapporto di potenza, che li differenzia in modo cospicuo.

*Operando con radiazione polarizzata rettilineamente e con vettore elettrico normale ai tratti del reticolo, l'onda diffratta di ordine  $K = +1$  raggiunge il primo massimo di intensità per un'incidenza di circa  $11^\circ$  (angolo che corrisponde all'incirca all'estinzione dell'onda diffratta di ordine  $K = -1$ ).*

*Operando invece con vettore elettrico parallelo ai tratti del reticolo, detto massimo è raggiunto per un angolo di incidenza all'incirca doppio.*

Questo, forse, spiegherebbe come per determinati angoli di incidenza R. W. Wood notasse il fenomeno di esaltazione solo in luce polarizzata ortogonalmente ai tratti.

Per particolari incidenze, inoltre, si possono ottenere onde diffratte l'intensità delle quali supera quella dell'onda centrale ( $K = 0$ ). Questo si verifica, almeno nelle esperienze in oggetto, quando il vettore elettrico è normale ai tratti.

Un'interpretazione di questo ultimo fatto, nel caso dei reticoli ottici incisi, è stata data facendo intervenire nei calcoli lo spessore delle superficie reticolari <sup>(5)</sup>. Uno studio sperimentale della distribuzione dell'ampiezza del vettore *E*, sul piano di emergenza del reticolo, in funzione dell'angolo di incidenza, potrà probabilmente rendere conto dei fenomeni suindicati.

Prove, per il momento di carattere qualitativo, hanno messo in rilievo un altro fatto già previsto per via teorica <sup>(6)</sup>. Se l'incidenza è normale, variando

<sup>(2)</sup> R. W. WOOD: *Phil. Mag.*, **4**, 396 (1902).

<sup>(3)</sup> LORD RAYLEIGH: *Phil. Mag.*, **14**, 60 (1907).

<sup>(4)</sup> G. TORALDO DI FRANCIA: *Ottica*, **6**, 291 (1941).

<sup>(5)</sup> G. TORALDO DI FRANCIA: *Ottica*, **6**, 275 (1941).

<sup>(6)</sup> G. TORALDO DI FRANCIA: *Ottica*, **7**, 263 (1941).



opportunamente il periodo di un reticolo, fermo restando il rapporto fra l'area libera e quella metallica, si possono far scomparire a due a due le onde diffratte degli ordini superiori e studiare le eventuali variazioni di intensità dell'onda centrale.

Le variazioni sono rilevanti e consentono di anticipare l'affermazione che il flusso, relativo alle onde diffratte scomparse, si aggiunge a quello dell'onda di ordine  $K = 0$ .

Qualcosa di analogo accade anche quando si operi su onde diffratte riflesse anziché trasmesse, per ora però le prove sono solo di carattere qualitativo.

Sono in corso di studio esplorazioni di campo elettromagnetico a valle di un reticolo: di questi studi sarà fatta menzione in una prossima nota.

Prima di terminare desidero rivolgere vivissimi ringraziamenti al prof. N. CARRARA, che mi è stato prodigo di consigli e suggerimenti durante lo svolgimento del lavoro e mi ha fornito i mezzi per concluderlo.

Desidero, inoltre, ringraziare l'ing. MARIO SCHAFFNER.

---

#### SUMMARY

A direct experimental proof has been given, concerning the Fraunhofer pattern of a diffraction grating. Microwaves of 32 mm have been used. The diffraction screen was a grating made out of metal strips. The intensity distribution is related to the angle of incidence. The period of the grating was so chosen that only the central and the first order waves were possible. A notable difference was observed if the electric vector  $E$  was parallel or normal to the grating strips.

## Sorgenti di neutroni variabili nel tempo in mezzi moltiplicanti (I).

S. GALLONE, L. ORSONI e C. SALVETTI

*Istituto di Fisica dell'Università e Laboratori CISE - Milano*

(ricevuto il 1° Ottobre 1951)

**Riassunto.** — Si studia la « risposta » di mezzi moltiplicanti sottocritici a « segnali » neutronici variabili nel tempo, non periodici (sorgente modulata o mobile). In particolare vengono studiati l'iniezione istantanea di neutroni comunque distribuiti, l'accensione e lo spegnimento di segnali di intensità costante agenti per un tempo finito, la distribuzione derivante da una sorgente istantanea puntiforme e quella dovuta ad una sorgente di intensità costante in moto uniforme. Si esaminano inoltre le correzioni dovute al l.c.m. dei neutroni nascenti e al tempo finito di rallentamento. Tali transitori dipendono dalle caratteristiche moltiplicative dei mezzi, sicchè il metodo può essere utilizzato per lo studio di elementi sottocritici di pila.

In alcune note precedenti <sup>(1)</sup>, <sup>(2)</sup>, <sup>(3)</sup> si è studiata la distribuzione dei neutroni in mezzi moltiplicanti sottocritici contenenti una sorgente di neutroni veloci (mezzi  $\mu$  iniettati) di intensità e posizione indipendenti dal tempo.

Si vuole qui studiare « la risposta » di un mezzo  $\mu$  sottocritico ad un « segnale » neutronico dipendente dal tempo (sorgente modulata o mobile).

Questa prima parte contiene l'impostazione generale del problema e il caso dei regimi transitori (segnale impresso non periodico): lo studio dei regimi permanenti (segnale impresso periodico), con particolare riguardo alla propagazione ondosa della perturbazione, verrà svolto nella seconda parte.

<sup>(1)</sup> S. GALLONE e C. SALVETTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 482 (1950).

<sup>(2)</sup> S. GALLONE e C. SALVETTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 626 (1950).

<sup>(3)</sup> S. GALLONE e C. SALVETTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 901 (1950).

N.B. — Nel seguito queste note verranno citate nell'ordine come (A), (B), (C).

Circa le ipotesi relative ai mezzi  $\mu$  e alle approssimazioni adottate si rimanda alle note citate. Quanto ai procedimenti di calcolo si sono dimostrati convenienti i metodi simbolici illustrati nelle note precedenti.

# 1. - Equazione della densità termica e soluzione generale.

L'equazione della densità termica in un mezzo  $\mu$  si ottiene aggiungendo il termine temporale alle (A, 2.7) ossia:

$$(1) \quad L^2 \nabla^2 \varrho(\mathbf{r}, t) + (k_\infty \exp [\tau \nabla^2] - 1) \varrho(\mathbf{r}, t) + \\ + \tau_c p \exp [\tau_0 \nabla^2] S_0(\mathbf{r}, t) = \tau_c \frac{\partial \varrho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$

L'ovvia estensione del metodo delle armoniche consiste, per un mezzo sottocritico, nell'effettuare un doppio sviluppo delle funzioni  $\varrho(\mathbf{r}, t)$  e  $S_0(\mathbf{r}, t)$  del tipo:

$$(2) \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = \sum_n \varphi_n(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{+\infty} A_n(\nu) \exp [i\nu t] d\nu,$$

$$(3) \quad S_0(\mathbf{r}, t) = \sum_n \varphi_n(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{+\infty} B_n(\nu) \exp [i\nu t] d\nu,$$

dove le  $\varphi_n(\mathbf{r})$  sono autofunzioni della equazione:

$$(4) \quad \nabla^2 \varphi_n(\mathbf{r}) + \omega_n^2 \varphi_n(\mathbf{r}) = 0,$$

relative alle condizioni sul contorno  $\sigma$  del mezzo  $\mu$ :

$$(5) \quad [\varphi_n(\mathbf{r})]_\sigma = 0.$$

Qualora il mezzo sia infinito (o si possa considerare tale), si sono adottati sviluppi in doppio integrale di Fourier del tipo:

$$(2') \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = \int_{(k)} d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\mathbf{k}, \nu) \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \nu t)] d\nu$$

$$(3') \quad S_0(\mathbf{r}, t) = \int_{(k)} d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\mathbf{k}, \nu) \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \nu t)] d\nu.$$

Dalla (1), ricordando la definizione (A, p. 486) degli operatori del tipo

$\exp [\tau \nabla^2]$ , si hanno, nei due casi, le formule risolutive:

$$(6) \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = p\tau_c \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_n(\nu) \exp [-\tau_0 \omega_n] \varphi_n(\mathbf{r}) \exp [i\nu t] d\nu}{1 + \omega^2 L^2 - k_\infty \exp [-\tau \omega_n^2] + i\nu \tau_c}$$

$$(6') \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = p\tau_c \int_{(k)} d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(\mathbf{k}, \nu) \exp [-\tau_0 k^2 + i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \nu t)] d\nu}{1 + k^2 L^2 - k_\infty \exp [-\tau k^2] + i\nu \tau_c}$$

Si può osservare che per mezzi sottocritici, e per  $\alpha$  reale, è

$$(7) \quad \Phi(\alpha) = 1 + \alpha^2 L^2 - k_\infty \exp [-\tau \alpha^2] > 0,$$

e che per ogni valore di  $\omega_n$  (o di  $k$ ) il denominatore dei singoli integrandi ha un solo zero, dato rispettivamente da:

$$(8) \quad \nu_n = i \frac{\Phi(\omega_n)}{\tau_c}$$

$$(8') \quad \nu(k) = i \frac{\Phi(k)}{\tau_c}$$

Qualora gli integrali calcolati lungo un contorno all'infinito del semipiano complesso ( $\nu$ ) superiore siano nulli, le integrazioni rispetto a  $\nu$  si possono effettuare con il metodo di Cauchy che fornisce i seguenti risultati:

$$(9) \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = 2\pi p \sum_n B_n(\nu_n) \exp [-\tau_0 \omega_n^2] \varphi_n(\mathbf{r}) \exp [-\Phi(\omega_n)t/\tau_c],$$

$$(9') \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = 2\pi p \int_{(k)} B[\mathbf{k}, \nu(k)] \exp [-\tau_0 k^2 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Phi(k)t/\tau_c] d\mathbf{k}.$$

Se viceversa sono nulli gli integrali calcolati lungo un contorno all'infinito del semipiano complesso ( $\nu$ ) inferiore, si ha:

$$(10) \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = 0.$$



## 2. - Iniezione istantanea di neutroni comunque distribuiti.

In questo caso si ha, qualora l'iniezione avvenga all'istante  $t = 0$ :

$$(11) \quad S_0(\mathbf{r}, t) = S_0(\mathbf{r})\delta(t),$$

$$(12) \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = \frac{p\tau_c}{2\pi} \sum_n B_n \exp[-\tau_0\omega_n^2]\varphi_n(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i\nu t]d\nu}{\Phi(\omega_n) + i\nu\tau_c},$$

$$(12') \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = \frac{p\tau_c}{2\pi} \int_{(k)} B(\mathbf{k}) \exp[-\tau_0k^2 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i\nu t]d\nu}{\Phi(k) + i\nu\tau_c},$$

e ricordando i risultati del n. 1, si ottiene:

$$(13) \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{1}(t - t_0)p \sum_{n=0}^{\infty} B_n \exp[-\tau_0\omega_n^2]\varphi_n(\mathbf{r}) \exp[-\Phi(\omega_n)t/\tau_c],$$

$$(13') \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{1}(t - t_0)p \int_{(k)} B(\mathbf{k}) \exp[-\tau_0k^2 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Phi(k)t/\tau_c] d\mathbf{k}.$$

È interessante notare che nel caso limite della criticità  $\Phi(\omega_0) = 0$ , nello sviluppo (13) permane stazionaria solo la prima armonica e tutte le altre si estinguono esponenzialmente. Per la (13') si osservi che pur avendosi un decremento locale della densità il numero dei neutroni termici contenuti in tutto il mezzo si mantiene costante e pari a  $p$  volte il numero di neutroni veloci iniettati.

Qualora il mezzo infinito sia sottocritico il numero totale dei neutroni termici decresce nel tempo secondo la legge:

$$\exp[-(1 - k_{\infty})t/\tau_c].$$

## 3. - Sorgente comunque distribuita e di intensità costante agente per un tempo finito (accensione e estinzione).

Una sorgente «accesa» tra gli istanti  $t = 0$  e  $t = \Delta t$  si può rappresentare con:

$$(14) \quad S_0(\mathbf{r}, t) = S_0(\mathbf{r})[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \Delta t)].$$

Nel caso del mezzo finito il coefficiente  $B_n(\nu)$  dello sviluppo (6) è dato da:

$$(15) \quad B_n(\nu) = \frac{B_n}{2\pi} \int_0^{\Delta t} \exp[-i\nu x] dx,$$

dove  $B_n$  è il coefficiente dello sviluppo della  $S_0(\mathbf{r})$  in serie di  $\varphi_n(\mathbf{r})$ .

La (6) fornisce pertanto:

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \frac{p\tau_c}{2\pi} \sum_n B_n \exp[-\tau_0 \omega_n^2] \varphi_n(\mathbf{r}) \int_0^{At} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i\nu(t-x)] d\nu}{\Phi(\omega_n) + i\nu\tau_c},$$

ossia:

$$(16) \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = p \sum_n B_n \exp[-\tau_0 \omega_n^2] \varphi_n(\mathbf{r}) \int_0^{At} \mathbf{1}(t-x) \exp\left[-\frac{\Phi(\omega_n)}{\tau_c}(t-x)\right] dx.$$

L'integrazione fornisce i seguenti risultati:

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = p\tau_c \sum_n \frac{B_n}{\Phi(\omega_n)} \exp[-\tau_0 \omega_n^2] \varphi_n(\mathbf{r}) \times \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0, \\ (1 - \exp[-\frac{\Phi(\omega_n)t}{\tau_c}]) & \text{per } 0 \leq t < At \text{ (accensione)}, \\ (\exp[\frac{\Phi(\omega_n)At}{\tau_c}] - 1) \exp[-\frac{\Phi(\omega_n)t}{\tau_c}] & \text{per } At < t \text{ (estinzione)}, \end{cases}$$

Queste formule possono estendersi facilmente al caso di un mezzo  $\mu$  infinito.

Si noti che per  $At \rightarrow \infty$  e  $t < At$  la densità tende asintoticamente all'espressione relativa ai casi stazionari già trattati nelle note citate.

Viceversa per  $At \rightarrow 0$  si riottiene dalle precedenti il caso della iniezione istantanea.

Se il mezzo  $\mu$  non è moltiplicante, l'andamento temporale delle singole armoniche è determinato dalla funzione

$$\exp\left[-\frac{\Phi(\omega_n)t}{\tau_c}\right] = \exp\left[-\left(\frac{1}{\tau_c} + \omega_n^2 D\right)t\right].$$

Discende di qui la possibilità di misurare la vita media dei neutroni termici qualora si disponga di una sorgente modulata e di tecniche di rivelazione ritardata. Un dispositivo di questo tipo è stato usato da MANLEY e coll. <sup>(1)</sup> per la misura della vita media dei neutroni nell'acqua.

#### 4. - Sorgente istantanea puntiforme in un mezzo infinito.

Si assume per semplicità che la sorgente sia collocata nell'origine e agente all'istante  $t = 0$ :

$$(18) \quad S_0(\mathbf{r}, t) = S_0 \delta(\mathbf{r}) \delta(t).$$

<sup>(1)</sup> J. H. MANLEY, L. J. HAWORTH e E. A. LUEBKE: *Phys. Rev.*, **61**, 152 (1942).

Se le  $\varphi_n(\mathbf{r})$  sono normalizzate le (13), (13') divengono:

$$(19) \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{1}(t) p S_0 \sum_n \exp[-\tau_0 \omega_n^2] \varphi_n(0) \varphi_n(\mathbf{r}) \exp[-\Phi(\omega_n) t / \tau_c],$$

$$(19') \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{1}(t) \frac{p S_0}{(2\pi)^3} \int_{(k)} \exp[-\tau_0 k^2 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Phi(k) t / \tau_c] d\mathbf{k}.$$

Limitando la trattazione al caso di mezzo infinito, dalla (19'), con ovvi passaggi, si ha:

$$(20) \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{1}(t) \frac{p S_0}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \exp[-\tau_0 k^2 - \Phi(k) t / \tau_c] \sin k r \cdot k dk.$$

Posto  $t^* = t / \tau_c$ , si può procedere nell'integrando al seguente sviluppo:

$$(21) \quad \exp[-\Phi(k) t^*] = \exp[-(1 + L^2 t^*) k^2] \sum_n \frac{(k_\infty t^*)^n}{n!} \exp[-n \tau k^2],$$

e integrare poi termine a termine <sup>(5)</sup>. Si ottiene:

$$(22) \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = \\ = \mathbf{1}(t) \frac{p S_0}{2\pi^2 r} \exp[-t^*] \sum_n \frac{(k_\infty t^*)^n}{n!} \int_0^\infty \exp[-(\tau_0 + L^2 t^* + n\tau) k^2] \sin k r \cdot k dk,$$

cioè:

$$(23) \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{1}(t) \frac{p S_0}{8\pi^{3/2}} \exp[-t^*] \sum_n \frac{(k_\infty t^*)^n}{n!} \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{4(\tau_0 + L^2 t^* + n\tau)}\right]}{(\tau_0 + L^2 t^* + n\tau)^{3/2}}.$$

Rivestono particolare interesse i due casi limite:

1)  $\tau = 0$ ; in questo caso la (23) diviene:

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{1}(t) \frac{p S_0}{8\pi^{3/2}} \exp[-t^*(1 - k_\infty)] \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{4(\tau_0 + L^2 t^*)}\right]}{(\tau_0 + L^2 t^*)^{3/2}}.$$

Si osservi che la densità nell'origine decresce con legge:

$$\exp[-t^*(1 - k_\infty)] / (\tau_0 + L^2 t^*)^{3/2}.$$

<sup>(5)</sup> L'integrazione termine a termine è lecita in base a un noto teorema. Vedi ad esempio, H. S. CARSLAW: *Theory of Fourier's Series and Integrals* (New York, 1930), p. 176.

2)  $\tau = \infty$ ; in questo caso si ha:

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{1}(t) \frac{pS_0}{8\pi^{3/2}} \exp[-t^*] \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{4(\tau_0 + L^2 t^*)}\right]}{(\tau_0 + L^2 t^*)^{3/2}},$$

e la densità nell'origine decresce con legge

$$\exp[-t^*]/(\tau_0 + L^2 t^*)^{3/2}.$$

Questa differenza di comportamento si interpreta facilmente: nel caso  $\tau = 0$  un neutrone che ha subito cattura moltiplicativa riappare come termico nel punto stesso di cattura; l'effetto della moltiplicazione equivale in questo caso ad un aumento della vita media « locale » da  $\tau_c$  a  $\tau_c/(1 - k_\infty)$ .

Nel caso  $\tau = \infty$  il neutrone che ha subito cattura moltiplicativa riappare come termico a grande distanza dal punto di cattura: in questo caso la cattura moltiplicativa non altera « localmente » la vita media.

La (23) è in accordo con i risultati ottenuti calcolando l'integrale della (20) con il metodo del punto di sella, limitatamente tuttavia al campo di validità del metodo stesso.

## 5. — Influenza del c.l.m. dei neutroni veloci.

Nella deduzione della (20) si è trascurato l'effetto dello sparpagliamento dei neutroni veloci di sorgente e di moltiplicazione, ossia si è considerato nullo il libero cammino medio di scattering dei neutroni nascenti.

Tenendo ora presente quanto osservato in proposito in una nota precedente (C), si trova immediatamente che, considerando il solo libero cammino medio  $1/\beta_0$  dei neutroni di sorgente, al posto della (20) si ha la formula:

$$(24) \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{1}(t) \frac{pS_0}{8\pi^{3/2}r} \exp[-t^*] \sum_n \frac{(k_\infty t^*)^n}{n!} \int_0^\infty \frac{\beta_0}{2ik} \log \frac{\beta_0 + ik}{\beta_0 - ik} \times \\ \times \exp[-(\tau_0 + L^2 t^* + n\tau)k^2] \sin kr \cdot k dk,$$

e tenendo anche conto del libero cammino medio  $1/\beta$  dei neutroni di moltiplicazione si trova:

$$(25) \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{1}(t) \frac{pS_0}{8\pi^{3/2}r} \exp[-t^*] \sum_n \frac{(k_\infty t^*)^n}{n!} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{\beta_0}{2ik} \log \frac{\beta_0 + ik}{\beta_0 - ik} \left( \frac{\beta}{2ik} \log \frac{\beta + ik}{\beta - ik} \right)^n \exp[-(\tau_0 + L^2 t^* + n\tau)k^2] \sin kr \cdot k dk.$$



## 6. - Sorgente puntiforme di intensità costante in moto uniforme.

In questo caso e per un mezzo  $\mu$  finito, si ha:

$$(26) \quad S_0(\mathbf{r}, t) = S_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}t) [\mathbf{1}(t - T_1) - \mathbf{1}(t - T_2)],$$

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità della sorgente,  $\mathbf{r}_0$  la sua posizione iniziale.  $T_1$  e  $T_2$  sono rispettivamente gli istanti in cui la sorgente entra ed esce dal mezzo.

La funzione di sorgente (26) può concepirsi come una sovrapposizione di sorgenti puntiformi istantanee data da:

$$(27) \quad S_0(\mathbf{r}, t) = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}t') [\mathbf{1}(t' - T_1) - \mathbf{1}(t' - T_2)] \delta(t - t') dt',$$

e pertanto, giusta la (19), si ottiene

$$(28) \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = S_0 p \sum_n \exp \left[ -\tau_0 \omega_n^2 \right] \varphi_n(\mathbf{r}) \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{1}(t - t') \varphi_n(\mathbf{r} + \mathbf{v}t') \exp \left[ -\Phi(\omega_n)(t - t')/\tau_c \right] dt'.$$

In particolare dalla (28) si ha:

$$(29) \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = S_0 p \sum_n \exp \left[ -\tau_0 \omega_n^2 \right] \varphi_n(\mathbf{r}) \times \begin{cases} 0 & \text{per } t < T_1, \\ \int_{T_1}^t \varphi_n(\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t') \exp \left[ -\Phi(\omega_n)(t - t')/\tau_c \right] dt' & \text{per } T_1 < t < T_2, \\ \int_{T_1}^{T_2} \varphi_n(\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t') \exp \left[ -\Phi(\omega_n)(t - t')/\tau_c \right] dt' & \text{per } T_2 < t. \end{cases}$$

## 7. - Sorgente piana in moto uniforme in un mezzo infinito.

Particolarmente interessante è il caso (unidimensionale) di una sorgente piana in moto uniforme in un mezzo infinito.

Con la funzione di sorgente:

$$(30) \quad S_0(\mathbf{r}, t) = S_0 \delta(z - z_0 - vt),$$

la densità risulta:

$$(31) \quad \varrho(z, t) = \frac{pS_0\tau_c}{2\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-\tau_0 k^2] \exp[ik(z - z_0 - vt)] dk}{\Phi(k) - ikv\tau}.$$

Per mettere maggiormente in evidenza il comportamento fisico del fenomeno, e per evitare degli sviluppi formali alquanto laboriosi e scarsamente significativi, poniamoci nell'approssimazione  $\tau_0 = \tau = 0$ , corrispondente a sorgente e a moltiplicazione termiche.

In tali condizioni:

$$(32) \quad \varrho(z, t) = \frac{pS_0\tau_c}{2\pi L^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[ik(z - z_0 - vt)] dk}{(k - k_1)(k - k_2)},$$

con

$$(33) \quad k_{1,2} = i \frac{v\tau_c}{2L^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4L^2(1 - k_\infty)}{v^2\tau_c^2}} \right] = ix_{1,2}.$$

Distinguiamo ora i due casi:

1) La densità calcolata in punti  $z$  non ancora raggiunti dalla sorgente [ $(z - z_0) > vt$ ] è:

$$(34) \quad \varrho_I(z, t) = pS_0\tau_c \frac{\exp[-x_1(z - z_0 - vt)]}{x_1 - x_2};$$

2) nei punti  $z$  già «scavalcati» dalla sorgente [ $(z - z_0) < vt$ ] si ha invece:

$$(35) \quad \varrho_{II}(z, t) = pS_0\tau_c \frac{\exp[-x_2(z - z_0 - vt)]}{x_1 - x_2}.$$

Si osservi che localmente ( $z = \text{cost.}$ ) la densità cresce esponenzialmente col tempo nella fase di avvicinamento della sorgente e, sempre per i mezzi sottocritici, decresce esponenzialmente nella fase di allontanamento della sorgente (fig. 1). La salita è più rapida della discesa.

Per  $v \gg 2L(1 - k_\infty)^{1/2}/\tau_c$  si possono utilizzare le formule approssimate

$$(36) \quad \varrho_I(z, t) \cong \frac{pS_0L^2}{v} \exp[-v\tau_c(z - z_0)/L^2] \exp[v^2\tau_c t/L^2],$$

$$(37) \quad \varrho_{II}(z, t) \cong \frac{pS_0L^2}{v} \exp[(1 - k_\infty)(z - z_0)/v\tau_c] \exp[-(1 - k_\infty)t/\tau_c].$$

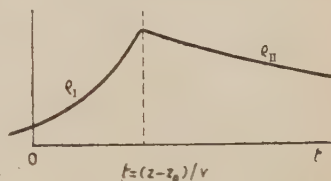


Fig. 1.

a proposito delle quali si nota che, nelle condizioni specificate, per gli istanti precedenti l'arrivo della sorgente la densità non dipende dalle proprietà moltiplicanti del mezzo (cioè da  $k_\infty$ ) mentre l'andamento, dopo il passaggio della sorgente dipende dalla vita media apparente  $\tau_c/(1 - k_\infty)$  caratteristica dei fenomeni di moltiplicazione.

## 8. - Influenza del tempo di rallentamento dei neutroni veloci.

Se si tiene conto del tempo finito di rallentamento dei neutroni veloci, per la densità termica anziché la (1) vale l'equazione

$$(38) \quad \nabla^2 \varrho(\mathbf{r}, t) + \left( k_\infty \exp \left[ \tau \nabla^2 - t_1 \frac{\partial}{\partial t} \right] - 1 \right) \varrho(\mathbf{r}, t) + \tau_0 p \exp \left[ \tau_0 \nabla^2 - t_0 \frac{\partial}{\partial t} \right] S_0(\mathbf{r}, t) = \tau_c \frac{\partial \varrho(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

dove  $t_1$  e  $t_0$  sono rispettivamente i tempi di rallentamento dei neutroni di moltiplicazione e di sorgente.

Sviluppando la  $\varrho(\mathbf{r}, t)$  e la  $S_0(\mathbf{r}, t)$  secondo le (2), (3) oppure secondo le (2'), (3') si trovano al posto delle (6), (6') le formule

$$(39) \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = p \tau_c \sum_n \exp \left[ -\tau_0 \omega_n^2 \right] \varphi_n(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_n(\nu) \exp [i\nu(t - t_0)] d\nu}{1 + \omega_n^2 L^2 - k_\infty \exp [-\tau \omega_n^2 - i\nu t_1] + i\nu \tau_c}$$

$$(40) \quad \varrho(\mathbf{r}, t) = p \tau_c \int_{(k)} \exp \left[ -\tau_0 k^2 \right] d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(\mathbf{k}, \nu) \exp [i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\nu(t - t_0)] d\nu}{1 + k^2 L^2 - k_\infty \exp [-\tau k^2 - i\nu t_1] + i\nu \tau_c}.$$

L'influenza dei tempi di rallentamento è in genere piccola<sup>(6)</sup> e tale da non alterare sostanzialmente i risultati della precedente trattazione.

<sup>(6)</sup> C. SALVETTI: *Nuovo Cimento*, **6**, 303 (1949).

## SUMMARY

Subcritical multiplying media containing non periodical time depending neutron sources are studied in the case of modulated and moving sources. Some simple cases, such as the instantaneous injection with a point source, the switching of a source of constant intensity and the moving source are considered. A short discussion on the correction for non vanishing mean free path of liberated neutrons and finite slowing down times follows. The transient behaviour depends upon the characteristic parameters of the multiplying medium, so that such methods may be of some use for studying subcritical pile elements.

## Un modello nucleare asimmetrico.

S. GALLONE e C. SALVETTI

*Istituto di Fisica dell'Università e Laboratori CISE - Milano*

(ricevuto il 4 Ottobre 1951)

**Riassunto.** - Un modello nucleare asimmetrico proposto da J. RAINWATER viene qui esteso e discusso per il caso di forte accoppiamento spin-orbita e di deformazioni più generali.

### Introduzione.

È noto che la teoria delle shell nucleari, fondata sul modello di un singolo nucleone moventesi in un campo a simmetria sferica prodotto dagli altri nucleoni, permette di interpretare diverse proprietà nucleari. Questo modello, mediante alcune ipotesi supplementari derivate da una analogia coi problemi atomici <sup>(1)</sup>, si è dimostrato particolarmente soddisfacente nell'interpretare i cosiddetti numeri magici e gli spin nucleari. Tuttavia non è altrettanto soddisfacente per quanto riguarda i momenti elettrici di quadrupolo che, in questa teoria, risultano in generale troppo piccoli e, in alcuni casi ( $Z$  pari —  $N$  dispari,  $Z$  pari —  $N$  pari), addirittura nulli. Ciò proviene dal fatto che l'intero momento di quadrupolo viene in questo schema attribuito ad un unico protone.

Un'altra difficoltà riguarda i momenti magnetici nucleari che nella teoria predetta dovrebbero cadere tutti sulle linee di SCHMIDT <sup>(2)</sup>, mentre i valori sperimentali se ne discostano spesso notevolmente, pur cadendo entro i limiti suddetti.

Le difficoltà menzionate sono probabilmente da attribuirsi alla eccessiva semplicità di tale modello, secondo il quale dovrebbe essere il solo nucleone « ottico » a determinare le diverse proprietà nucleari.

Una possibile via di uscita a queste difficoltà può consistere nell'abbandono

<sup>(1)</sup> A questo proposito cfr.: M. G. MAYER: *Phys. Rev.*, **78**, 16, 22 (1950).

<sup>(2)</sup> T. SCHMIDT: *Zeits. f. Phys.*, **106**, 358 (1937).

dell'ipotesi del campo a simmetria sferica. Tale è lo spirito di due recenti studi di J. RAINWATER <sup>(3)</sup> e di A. BOHR <sup>(4)</sup> <sup>(5)</sup>. Nel primo di essi si dimostra che una configurazione ellissoidica del nucleo può essere energeticamente favorita e di conseguenza i momenti di quadrupolo possono risultare del giusto ordine di grandezza. È pure prevedibile, nello spirito di questo lavoro, una deviazione dei momenti magnetici dalle linee di SCHMIDT. Nei lavori di A. BOHR non è fatta alcuna ipotesi riguardo all'origine della asimmetria del nucleo, ma vengono indagate le conseguenze sui momenti magnetici e sulla struttura iperfina derivanti da vari tipi di accoppiamento possibili tra i momenti angolari orbitale ed intrinseco del singolo nucleone con l'asse di simmetria del nucleo stesso.

L'abbandono fin dall'inizio della simmetria sferica ha per conseguenza di fare intervenire nella teoria dei predetti fenomeni l'insieme di quei nucleoni che, essendo appaiati nel modello della MAYER, non portano alcun contributo al momento di quadrupolo e al momento magnetico.

In questo lavoro si indaga sulla natura del modello proposto da RAINWATER che viene qui esteso a deformazioni di carattere più generale e al caso di forte accoppiamento spin-orbita e si accenna alle conseguenze qualitative sul calcolo dei momenti magnetici.

A tale proposito si riprendono, con l'aggiunta dello spin, risultati di un precedente lavoro <sup>(6)</sup> relativo allo spostamento dei livelli energetici di un nucleone in una buca sferoidale di profilo

$$(1) \quad R(\mu) = R_0[1 + \sum_i \alpha_i P_i(\mu)].$$

Si danno quindi i risultati di un calcolo variazionale che fornisce la variazione dell'energia totale del nucleo rispetto alla simmetria sferica: da tale studio discende la possibilità di uno strozzamento o di un rigonfiamento nel piano equatoriale. Infine, sulle basi di tali risultati, si giustifica l'adozione di accoppiamenti di tipo molecolare per il calcolo dei momenti magnetici.

#### **Perturbazione dei livelli energetici di un nucleone in una buca sferoidale con forte accoppiamento spin-orbita.**

Riprendiamo il problema del moto di un nucleone in una buca di profilo (1). Nell'approssimazione in cui viene trascurato lo spin il problema è già stato

<sup>(3)</sup> J. RAINWATER: *Phys. Rev.*, **79**, 432 (1950).

<sup>(4)</sup> A. BOHR: *Phys. Rev.*, **81**, 134 (1951).

<sup>(5)</sup> A. BOHR: *Phys. Rev.*, **81**, 331 (1951).

<sup>(6)</sup> S. GALLONE e C. SALVETTI: *Phys. Rev.*, **82**, 551 (1951).



trattato nel caso di deformazioni ellissoidali (intervento della sola  $P_2(\mu)$ ) <sup>(3)</sup> <sup>(7)</sup> <sup>(8)</sup> ed esteso dagli Autori <sup>(6)</sup> al caso di deformazioni più generali del tipo (1) con speciale riguardo all'effetto della  $P_4(\mu)$ .

Ci si propone qui di estendere il calcolo al caso in cui un forte accoppiamento spin-orbita del tipo

$$(2) \quad \text{cost. } \mathbf{l} \times \mathbf{s}$$

intervenga nella hamiltoniana imperturbata del problema.

Il metodo già usato dagli Autori consiste nello sviluppare il potenziale sferoidale nelle prossimità del contorno:

$$(3) \quad U(r, \mu) = D \mathbf{1}[r - R(\mu)] \not\subseteq D \mathbf{1}(r - R_0) - D\delta(r - R_0)\Delta R(\mu),$$

dove  $D$  è la profondità della buca,  $\Delta R(\mu) = R_0 \sum_i \alpha_i P_i(\mu)$  e  $\mu$  è il coseno dell'angolo che il vettore posizione del nucleone forma con l'asse di simmetria del nucleo; infine

$$\mathbf{1}(r - R_0) = \begin{cases} 0 & \text{per } r \leq R_0 \\ 1 & \text{per } r > R_0 \end{cases}.$$

Nel caso attuale di forte accoppiamento spin-orbita le autofunzioni di approssimazione zero sono:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_{n,l,l-1/2,m} &= \frac{\varrho_{n,l}(r)}{(2l+1)^{1/2}} \{ (l+1/2 - m)^{1/2} Y_{l,m-1/2}(\vartheta, \varphi) \alpha(\sigma) - \\ &\quad - (l+1/2 + m)^{1/2} Y_{l,m+1/2}(\vartheta, \varphi) \beta(\sigma) \} \\ \psi_{n,l,l+1/2,m} &= \frac{\varrho_{n,l}(r)}{(2l+1)^{1/2}} \{ (l+1/2 + m)^{1/2} Y_{l,m-1/2}(\vartheta, \varphi) \alpha(\sigma) + \\ &\quad + (l+1/2 - m)^{1/2} Y_{l,m+1/2}(\vartheta, \varphi) \beta(\sigma) \}. \end{aligned} \right.$$

Lo spostamento dei livelli imperturbati  $E_{n,l,l \mp 1/2,m}$  è dato da:

$$(5) \quad \Delta E_{n,l,l \mp 1/2,m} = -DR_0^3 |\varrho_{n,l}(R_0)|^2 \sum_i \alpha_i \left[ \frac{l+1/2 \mp m}{2l+1} \times \right. \\ \left. \times \int Y_{l,m-1/2}(\vartheta, \varphi)^2 P_i(\mu) d\mu d\varphi + \frac{l+1/2 \pm m}{2l+1} \int |Y_{l,m+1/2}(\vartheta, \varphi)|^2 P_i(\mu) d\mu d\varphi \right].$$

Le deformazioni  $\alpha_i P_i$  di indice dispari non danno contributo; in particolare

<sup>(7)</sup> E. FEENBERG e K. C. HAMMACK: *Phys. Rev.*, **81**, 285 (1951).

<sup>(8)</sup> S. GRANGER e R. D. SPENCE: *Phys. Rev.*, **83**, 460 (1951).

per le deformazioni  $P_2$  e  $P_4$  si ottiene:

$$(6) \quad \Delta E_{n,l,j,m} = -DR_0^3 |\varrho_{n,l}(R_0)|^2 \left\{ \alpha_2 \frac{j(j+1) - 3m^2}{4j(j+1)} + \right. \\ \left. + \alpha_4 \frac{3}{64} \frac{35m^4 - 5m^2[6j(j+1) - 5] + 3j(j^2 - 1)(j+2)}{j(j^2 - 1)(j+2)} \right\},$$

dove  $j$  è il quanto angolare totale del nucleone.

Si osservi che il coefficiente  $j(j+1) - 3m^2$  di  $\alpha_2$ , si identifica con l'espressione data da PAULI per i livelli energetici dell'elettrone nel campo di una molecola biatomica<sup>(9)</sup>, il che costituisce un aspetto della analogia coi problemi molecolari.

Se si passa al caso della buca infinitamente profonda si ha:

$$(7) \quad \lim_{D \rightarrow \infty} D |\varrho_{n,l}(R_0)|^2 = \frac{\hbar^2 x_{n,l}^2}{M R_0^5},$$

dove  $M$  è la massa del nucleone e  $x_{n,l}$  è lo zero d'ordine  $n$  della funzione di Bessel di ordine  $l + 1/2$ .

### Forma di equilibrio del nucleo e spostamento dell'energia totale conseguente alla deformazione.

Nelle considerazioni che seguono si distinguono un nocciolo (rumpf, core) costituito dai nucleoni raggruppati in orbite saturate e da uno o più nucleoni che vengono trattati individualmente (extranucleoni). Il nocciolo viene considerato alla stregua di una goccia liquida alla Bohr-Wheeler a parete impenetrabile agli extranucleoni.

Qualora il nocciolo sia sufficientemente pesante da potersi trascurare la sua energia di rotazione, la variazione dell'energia nucleare totale  $\Delta E_{\text{tot}}$ , conseguente ad una generica deformazione, sarà la somma della variazione di energia degli extranucleoni e delle variazioni di energia elettrostatica e di superficie del nocciolo. In particolare se  $N$  e  $P$  sono rispettivamente il numero degli extranutroni e degli extraprotoni, per una deformazione  $\alpha_2 P_2 + \alpha_4 P_4$  si ha in base alla nota formula di Bohr-Wheeler<sup>(10)</sup>:

$$(8) \quad \Delta E_{\text{tot}} = 4\pi R_0^2 A^{2/3} \tau \left[ \frac{2}{5} (1-x) \alpha_2^2 + \left( 1 - \frac{10}{27} x \right) \alpha_4^2 \right] - \\ - \frac{\hbar^2}{M R_0^2 A^{2/3}} \sum_{k=1}^{N+P} x_{n_k,l_k}^2 (\alpha_2 J_{j_k,m_k,2} + \alpha_4 J_{j_k,m_k,4}),$$

<sup>(9)</sup> Vedasi, per esempio, R. C. JOHNSON: *An Introduction to Molecular Spectra* (London, 1949), p. 82.

<sup>(10)</sup> N. BOHR e J. A. WHEELER: *Phys. Rev.*, **56**, 426 (1939).

dove

$$x = \frac{Z^2/A}{10(4\pi/3)\tau(r_0^3/e^2)},$$

e  $Z$  e  $A$  si riferiscono al nocciolo e  $\tau$  è la tensione superficiale. Inoltre si è posto:

$$(9) \quad \begin{cases} J_{j_k, m_k, 2} = \frac{j_k(j_k + 1) - 3m_k^2}{4j_k(j_k + 1)} \\ J_{j_k, m_k, 4} = \frac{3}{64} \frac{35m_k^4 - 5m_k^2[6j_k(j_k + 1) - 5] + 3j_k(j_k^2 - 1)(j_k + 2)}{(j_k^2 - 1)(j_k + 2)} \end{cases}$$

e la somma nella (8) è da intendersi effettuata sugli stati effettivamente occupati da tutti gli extranucleoni.

$\Delta E_{\text{tot}}$  risulta minima per i seguenti valori della deformazione:

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha_2 = \frac{\hbar^2}{4\pi r_0^4 A^{4/3} \tau M} \frac{\sum_{k=1}^{N+P} x_{n_k, l_k}^2 J_{j_k, m_k, 2}}{\frac{4}{5}(1-x)} \\ \alpha_4 = \frac{\hbar^2}{4\pi r_0^4 A^{4/3} \tau M} \frac{\sum_{k=1}^{N+P} x_{n_k, l_k}^2 J_{j_k, m_k, 4}}{2\left(1 - \frac{10}{27}x\right)} \end{cases}$$

che fissano la forma di equilibrio del nucleo.

Le conseguenze della deformazione  $\alpha_2$  sono:

- 1) che i momenti di quadrupolo così calcolati risultano di un più adeguato ordine di grandezza <sup>(11)</sup>;
- 2) che il contributo al momento di quadrupolo degli extranucleoni di una stessa specie cambia di segno col procedere del riempimento di un'orbita;
- 3) che i nuclei  $Z$  pari —  $N$  dispari e  $Z$  pari —  $N$  pari non hanno necessariamente momento di quadrupolo nullo.

Per quanto concerne la deformazione  $\alpha_4$  essa può essere di un certo rilievo solo per gli spin elevati: nel caso di un solo extranucleone (effettivo o mancante) essa risulta piccola rispetto alla  $\alpha_2$  (dell'ordine del 10 % per nuclei di peso atomico medio); se il nucleo è fusiforme ( $\alpha_2 > 0$ ) la  $P_4$  determina una lieve strozzatura nel piano equatoriale; se invece il nucleo è discoidale ( $\alpha_2 < 0$ ) essa determina un ulteriore rigonfiamento all'equatore.

<sup>(11)</sup> Vedasi tuttavia l'osservazione contenuta alla fine del lavoro già citato di RAINWATER e le considerazioni di FEENBERG e HAMMACK.

Le (10) danno come valore minimo della variazione dell'energia totale:

$$(11) \quad \overline{\Delta E}_{\text{tot}} = -\frac{\hbar^4}{16\pi(r_0 A^{1/3})^6 \tau M^2} \left\{ \frac{5}{2} \frac{\left( \sum_{k=1}^{N+P} x_{n_k, l_k}^2 J_{j_k, m_k, 2} \right)^2}{(1-x)} + \right. \\ \left. + \frac{\left( \sum_{k=1}^{N+P} x_{n_k, l_k}^2 J_{j_k, m_k, 4} \right)^2}{\left( 1 - \frac{10}{27} x \right)} \right\};$$

à proposito della quale si osservi che la deformazione porta sempre a un guadagno energetico, salvo nel caso in cui gli extranucleoni siano raggruppati in orbite sature: si riottiene allora il nucleo a simmetria sferica.

Nella (11) le somme vanno calcolate tenendo conto del principio di esclusione; inoltre, per lo stato fondamentale dei nuclei, gli stati occupati dagli extranucleoni vanno scelti in modo da rendere minima la somma della energia imperturbata dei predetti extranucleoni e del termine di perturbazione  $\overline{\Delta E}_{\text{tot}}$ . Per quanto detto prima sull'ordine di grandezza dell' $\alpha_4$ , è chiaro che mentre essa influisce sulla forma di equilibrio del nucleo, essa non conta, praticamente, sulla variazione di energia.

### Riempimento dei livelli, spin e momenti magnetici.

Dall'abbandono della simmetria sferica discende che i momenti angolari totali  $j_k$  dei singoli extranucleoni non sono più costanti del moto. Per la simmetria cilindrica restano invece costanti del moto le loro proiezioni  $m_k$  sull'asse di simmetria. La scomparsa parziale della degenerazione rispetto ad  $m$  fa sì che nel riempimento dei singoli livelli i nucleoni omonimi si dispongano a due a due sullo stesso livello con  $m_k$  opposti; con che, nell'approssimazione zero, i due nucleoni si dispongono con i momenti angolari  $j$  antiparalleli. Tale disposizione dei momenti angolari, qui dedotta senza introdurre speciali assunzioni, viene invece adottata a priori tra le ipotesi dell'accoppiamento  $j$ - $j$  postulato dalla MAYER.

La proiezione del momento angolare totale degli extranucleoni sull'asse di simmetria del nocciolo è la somma degli  $m_k$  relativi ai soli nucleoni non appaiati. Nello stato fondamentale il numero dei nucleoni non appaiati è: due nel caso dei nuclei dispari-dispari; uno per i pari-dispari e i dispari-pari e ovviamente zero per i pari-pari.

Posto  $\Omega = \sum_k m_k$ , lo spin nucleare  $I$  sarà dato da  $I = \Omega$  se si ammette che in questo modo risulti minima la energia di rotazione del nucleo.

Lo spin nucleare risulta così nullo per i nuclei pari-pari: i pari-dispari e i dispari-pari hanno uno spin  $I \leq j$ , dove  $j$  è il momento angolare del nucleone non appaiato. Si vede di qui la possibilità di interpretare spin nucleari più piccoli del momento angolare totale del singolo extranucleone con un meccanismo diverso da quello dell'accoppiamento  $j-j$  proposto dalla MAYER <sup>(12)</sup>.

Per i dispari-dispari lo spin nucleare è la somma degli  $m_x$  dei due extranucleoni eteronimi.

Da quanto precede e per la possibilità di trasferire parte del momento angolare dal nucleone «ottico» al nocciolo o a parte di esso, la rotazione del nocciolo (al quale si può assegnare in prima approssimazione un rapporto giromagnetico  $\sim Z/A$ ) potrà contribuire al momento magnetico nucleare in aggiunta al momento magnetico orbitale ed intrinseco del nucleone. Sulla base dell'analogia molecolare il presente modello suggerisce un accoppiamento del tipo (c) di HUND <sup>(13)</sup> corrispondente al caso ( $B_2$ ) di A. BOHR <sup>(4)</sup>.

È infine utile rilevare che, soprattutto per i nuclei non molto pesanti, andrebbero considerati gli effetti dovuti alla massa non infinita del nucleo.

---

<sup>(12)</sup> Questo punto però ha carattere soltanto indicativo e di puro suggerimento. Allo stato attuale di questa indagine è difficile affermare se si possa, nell'ambito del modello trattato, trovare un meccanismo atto a sostituirsi convenientemente all'accoppiamento  $j-j$ . L'indagine deve vertere sullo studio sistematico della (11), tenendo conto dell'osservazione relativa a questa formula, fatta nel numero precedente.

<sup>(13)</sup> Cfr. per esempio, il libro già citato di R. C. JOHNSON, p. 101.

## SUMMARY

An asymmetric nuclear model proposed by J. RAINWATER is here extended and discussed for the case of strong spin-orbit coupling and more general deformations.



## Diffrazione di raggi X da parte di soluzioni acquose di alcuni solfati.

E. TARTAGLIONE

*Istituto di Fisica dell'Università - Napoli*

(ricevuto il 9 Ottobre 1951)

**Riassunto.** — È stato studiato il comportamento alla diffrazione dei raggi X presentato dall'acqua e da soluzioni di  $\text{CuSO}_4$ ,  $\text{FeSO}_4$  ed  $\text{MnSO}_4$ . Si è notato, in accordo con i risultati ottenuti da altri lavori in effetto Raman, che i tre sali hanno un'azione specifica sul solvente e particolarmente il  $\text{CuSO}_4$  e il  $\text{FeSO}_4$  esaltano i fenomeni di associazione molecolare dell'acqua, mentre il  $\text{MnSO}_4$  produce un effetto opposto.

Seguendo il metodo illustrato in altre note <sup>(1)</sup>, si è studiata la distribuzione dell'intensità dei raggi X diffratti da soluzioni acquose di alcuni solfati. Sono da ricordare a tale proposito, per quanto riguarda le soluzioni, i lavori di PRINS e collaboratori <sup>(2)</sup>, i quali hanno indagato sulle soluzioni di ioni pesanti, riuscendo a classificarle in tre categorie:

1) Soluzioni che presentano due massimi, di cui uno invariabile come diametro, dovuto evidentemente al solvente, l'altro variabile come diametro con la concentrazione, interpretato come dovuto ad interferenze fra i raggi diffratti dagli ioni pesanti, i quali non sarebbero quindi distribuiti a caso, e la cui distanza varia al variare della concentrazione.

2) Soluzioni in cui scompare il massimo caratteristico del solvente e per le quali è da ritenere una distribuzione ionica irregolare in seno al liquido.

3) Soluzioni che presentano un anello molto marcato con un massimo in posizione indipendente dalla concentrazione e che sarebbe dovuto a interferenze fra raggi diffratti da ciascun ione e le molecole di acqua ad esso circostanti.

<sup>(1)</sup> F. CENNAMO: *Atti Acc. Naz. dei Lincei*, **9**, 339 (1950).

<sup>(2)</sup> J. A. PRINS: *Journ. Chem. Phys.*, **3**, 72 (1936).

Per portare un contributo al problema della struttura delle soluzioni ioniche noi abbiamo preso in esame soluzioni acquose di:  $\text{CuSO}_4$ ,  $\text{FeSO}_4$ ,  $\text{MnSO}_4$ .

I rapporti fra le molecole di soluto presenti e quelle di acqua sono per le tre soluzioni rispettivamente: 1/50; 1/57; 1/39 (si è tenuto naturalmente in debito conto l'acqua di cristallizzazione presente in tutti e tre i sali).

I risultati ottenuti relativamente al solvente puro ed alle tre soluzioni sono riportate nelle figg. 1, 2, 3 e 4, dove sull'asse delle ascisse sono segnati i valori degli angoli di diffrazione (in radianti) e sulle ordinate le intensità relative. Col metodo seguito i risultati sono confrontabili fra loro. Come si vede, oltre ad un continuo dipendente da varie cause, per l'acqua si ottengono due massimi la cui posizione ed il cui rapporto di intensità sono in buon accordo con quelli ottenuti dagli altri sperimentatori. Nella fig. 5 sono poi riportate, nelle medesime coordinate, le curve relative all'acqua ed alle soluzioni di  $\text{CuSO}_4$  e di  $\text{FeSO}_4$  in cui è stato eliminato il continuo.

Osservando le curve che danno la distribuzione delle intensità nelle soluzioni si nota una modifica notevole nell'intensità dei massimi caratteristici del solvente (nei casi da noi studiati non compare alcun massimo caratteristico dell'ione). Ma l'interessante è il notare che i sali studiati hanno sul solvente un'azione specifica: precisamente il  $\text{CuSO}_4$  ed il  $\text{FeSO}_4$  producono un notevole aumento dell'intensità dei massimi (1/28 ed 1/20 circa, rispettivamente, per il  $\text{CuSO}_4$  ed il  $\text{FeSO}_4$  in corrispondenza del primo massimo e non tenuto conto del continuo). Per azione del  $\text{MnSO}_4$  invece tali massimi scompaiono del tutto. In altre parole, dai risultati ottenuti sembra potersi affermare che lo ione  $\text{Cu}^{++}$  e lo ione  $\text{Fe}^{++}$  agiscono nel senso di favorire i fenomeni di associazione molecolare; mentre l'azione dell'ione  $\text{Mn}^{++}$  appare del tutto opposta.

Ora sono stati scelti per la nostra indagine i tre sali sopra ricordati, perchè essi sono stati studiati anche in effetto Raman (<sup>3</sup>). Il gruppo di bande Raman a  $3500 \text{ cm}^{-1}$  subisce, per effetto della presenza di  $\text{Cu}^{++}$  e di  $\text{Fe}^{++}$ , notevole diminuzione nell'intensità, mentre il  $\text{Mn}^{++}$  esalta notevolmente tale intensità. Come è noto, tale complesso Raman è costituito da tre bande con i massimi a:

$$\Delta\nu = \begin{cases} 3200 \\ 3435 \\ 3600 \end{cases} \text{ cm}^{-1}.$$

Di queste tre bande, quelle relative a  $3435 \text{ cm}^{-1}$  e a  $3600 \text{ cm}^{-1}$  sono state, come è noto, classificate da molti Autori come corrispondenti, rispettivamente, alle frequenze simmetriche ed antisimmetriche della molecola sem-

(<sup>3</sup>) F. CENNAMO: *Nuovo Cimento*, **13**, 304 (1936).

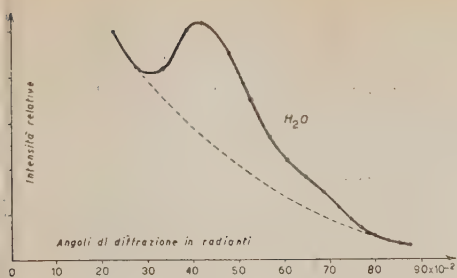


Fig. 1.

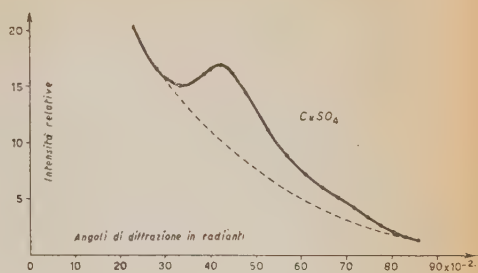


Fig. 2.

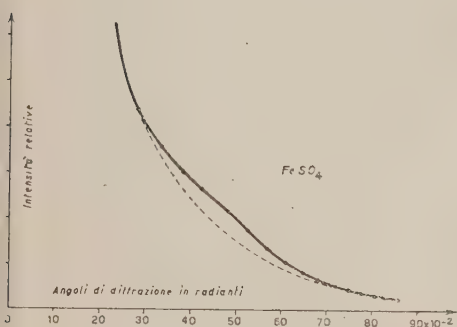


Fig. 3.

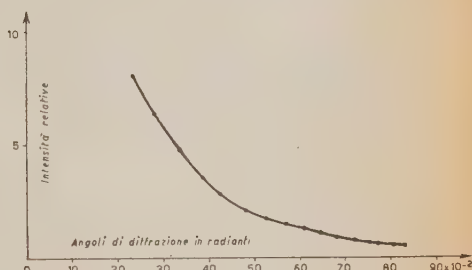


Fig. 4.

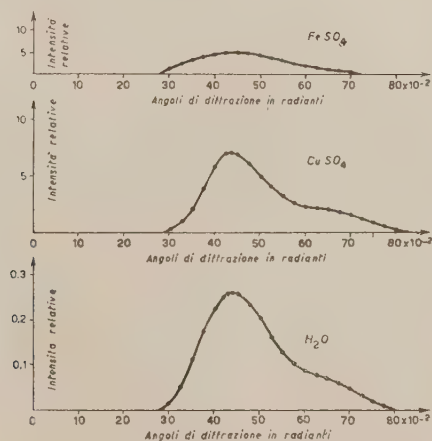


Fig. 5.

plice dell'acqua; per cui la diminuzione della intensità riscontrata nel gruppo citato di bande Raman per azione del  $\text{Cu}^{++}$  e del  $\text{Fe}^{++}$  è stata interpretata <sup>(3)</sup> come dovuta ad una diminuzione nel numero di molecole semplici di acqua e quindi a formazione di gruppi associati. Il contrario avviene per azione del  $\text{Mn}^{++}$ .

Studiando le medesime soluzioni con i raggi X, e cioè con un metodo completamente diverso da quello adoperato in effetto Raman, è stato trovato, come precedentemente si è visto, che l'ione  $\text{Mn}^{++}$  distrugge il massimo caratteristico dell'acqua, mentre l'ione  $\text{Cu}^{++}$  e l'ione  $\text{Fe}^{++}$  ne esaltano la intensità. Poichè l'anello di diffrazione dell'acqua è generalmente interpretato come dovuto a fenomeni di associazione molecolare, dai risultati ottenuti si deduce che tali processi vengono favoriti dalla presenza del  $\text{Cu}^{++}$  e del  $\text{Fe}^{++}$ , mentre vengono ostacolati dalla presenza di  $\text{Mn}^{++}$ , e quindi i risultati ottenuti con i raggi X concordano secondo l'interpretazione data alle bande Raman dell'acqua con i risultati già trovati in effetto Raman <sup>(4)</sup>.

Il presente lavoro è stato eseguito nell'Istituto di Fisica Sperimentale dell'Università di Napoli.

Si ringrazia vivamente il prof. CARRELLI per i consigli dati ed i mezzi messi a disposizione.

---

(4) F. CENAMO: Lavori citati.

---

#### SUMMARY

Author has studied the diffraction of X rays presented by water and  $\text{CuSO}_4$ ;  $\text{FeSO}_4$ ;  $\text{MnSO}_4$  solutions. We have remarked, in according to results acquired by other works in Raman effect, that the three salts have a specific action on the solvent and especially  $\text{CuSO}_4$  and  $\text{FeSO}_4$  exalt the processes of the molecular association of water but  $\text{MnSO}_4$  produces an opposite effect.

## Determinazione delle costanti elastiche del ghiaccio.

F. JONA e P. SCHERRER

*Istituto di Fisica del Politecnico Federale - Zurigo*

(ricevuto il 14 Ottobre 1951)

**Riassunto.** — Si descrivono due metodi per la fabbricazione in laboratorio di grossi monocristalli di ghiaccio assolutamente limpidi e privi di difetti. Con i cristalli così ottenuti vengono quindi determinate, per mezzo del metodo ultrasonoro di Schaefer e Bergmann, le cinque costanti  $c_{ik}$  che caratterizzano il comportamento elastico del ghiaccio. I risultati sperimentali sono in buona concordanza con i valori teorici calcolati da PENNY in base alla teoria dinamica del reticolo cristallino di Born.

### 1. — Introduzione.

Le proprietà elastiche del ghiaccio sono state oggetto di numerose ricerche da parte di vari Autori <sup>(1)</sup>. Le uniche grandezze elastiche misurate sono il modulo di elasticità  $E$  di Young ed il modulo di rigidezza  $G$ , dai quali si calcola poi il rapporto di Poisson  $m$ . La misura di tutte le cinque costanti  $c_{ik}$  che caratterizzano il comportamento elastico di un cristallo di ghiaccio non è fino ad oggi mai stata effettuata. I dati fornitici dalle varie esperienze per le grandezze  $E$ ,  $G$ ,  $m$ , mostrano per lo più delle discrepanze notevoli da attribuirsi soprattutto al fatto che il materiale studiato era sempre di *natura policristallina*. Altri due fattori importanti in questo senso sono la purezza del materiale usato per l'esperienza e il metodo di misura.

La determinazione del modulo  $E$  di Young con metodi statici, per esempio, viene sensibilmente ostacolata dai fenomeni della cosiddetta memoria elastica, tanto che appare assai dubbio se i risultati ottenuti con misure statiche siano accettabili. Molti Autori hanno perciò preferito effettuare misure dinamiche <sup>(2)</sup> (determinazione della velocità di propagazione di onde elastiche di elevata

<sup>(1)</sup> N. E. DORSEY: *Properties of ordinary water-substance* (New-York, 1940).



frequenza) che offrono maggiori garanzie di successo. Il modulo di elasticità venne così misurato in funzione dell'angolo  $\vartheta$  compreso fra la direzione di maggiore lunghezza della sbarra di ghiaccio studiata e la normale alla superficie di congelamento. Anche ammettendo che le sbarrette esaminate fossero ciascuna un monocristallo, tali misure sono criticabili perchè l'asse ottico di un monocristallo di ghiaccio non è sempre esattamente perpendicolare alla superficie di congelamento. È quindi comprensibile che i risultati ottenuti con diverse sbarrette per ugual angolo  $\vartheta$  mostrino discordanze del 10 e 15% che corrispondono al valore non nullo dell'angolo compreso fra l'asse ottico e la normale alla superficie di congelamento.

Scopo del presente lavoro è di illustrare due metodi che consentono la fabbricazione, in laboratorio, di grossi monocristalli di ghiaccio assolutamente limpidi e privi di difetti. In tal modo la purezza del materiale esaminato è ben definita. Con cristalli così ottenuti si sono determinate, per mezzo di un metodo dinamico, tutte le cinque costanti elastiche  $c_{ik}$  del ghiaccio.

## 2. - Fabbricazione di monocristalli di ghiaccio.

L'esame di grossi blocchi di ghiaccio naturale rivela non di rado l'esistenza di monocristalli di notevoli dimensioni (fino a 10 cm in ogni direzione). I fattori fisici che favoriscono la crescita di questi monocristalli nello strato di ghiaccio che si forma alla superficie di laghi, mari, ecc., sono i seguenti: lo specchio d'acqua è in contatto con aria la cui temperatura è notevolmente al di sotto dei 0°. Poichè la temperatura è inferiore a 4 °C si vengono a formare, nell'acqua, strati successivi la cui densità e la cui temperatura aumentano gradatamente con la profondità. Il gradiente di temperatura si mantiene per lo più verticale e parallelo. Man mano che la temperatura diminuisce l'acqua pura congela dall'alto verso il basso e gli strati non subiscono spostamenti. Il processo di congelamento avviene assai lentamente.

Nella ricerca di un metodo per la fabbricazione di grossi monocristalli di ghiaccio artificiale abbiamo cercato di riprodurre in laboratorio la maggior parte dei fattori sopra esposti. Il processo di fabbricazione dei cristalli (come, in seguito, la loro lavorazione e misura) avviene in un ambiente mantenuto costantemente alla temperatura di -20 °C <sup>(2)</sup>. Si sono seguiti *due* metodi qui appresso illustrati.

a) *Raffreddamento lento con gradiente termico verticale e parallelo.* - I recipienti usati sono metallici di forma cilindrica (circa 9 cm di diametro e 12 cm di altezza). Sulla parete esterna del recipiente, isolato elettricamente da questo,

---

(2) Il presente lavoro è stato effettuato in una delle celle frigorifere della Ditta A. Hürlimann S.A., Zurigo, cui porgiamo qui il nostro sentito ringraziamento.

è avvolto a spirale di passo uniforme un filo di costantana interrotto in due punti in modo da ottenere tre bobine I, II e III di uguale resistenza elettrica. L'avvolgimento superiore I serve a riscaldare la parte più alta del recipiente, le altre bobine, successivamente, le sezioni più basse. Uno strato di lana di vetro spesso circa 6 cm serve inoltre ad isolare termicamente le pareti del recipiente dall'aria circostante. L'acqua è in contatto termico con l'aria ambiente solo attraverso la sua superficie libera.

Applicando la medesima tensione  $V$  alle tre bobine I, II e III si regola  $V$  in modo che la temperatura dell'acqua raggiunga 1 o 2 °C. Si mantengono quindi tali condizioni per circa 10 o 12 ore, si dà permettere la formazione, nella colonna d'acqua, di strati orizzontali a densità variabile cui più sopra si è accennato. Si diminuisce quindi lentamente e regolarmente la corrente elettrica che attraversa la sola bobina superiore I, mantenendo invece costante il riscaldamento fornito dalle bobine inferiori. Ridotta a zero la corrente della bobina I si continua il processo di abbassamento della temperatura dell'acqua con la bobina II e così via. È chiaro che tale procedimento permette di mantenere verticale e parallelo il gradiente termico. Per di più la cristallizzazione ha luogo lentamente e progressivamente dall'alto verso il basso; in tal modo le impurità contenute nell'acqua (sali, aria, ecc.) vanno concentrandosi sempre più verso il fondo del recipiente. Per impedire che l'aumentata concentrazione delle impurità disturbi ad un certo punto la cristallizzazione, il processo viene per lo più interrotto quando l'altezza del cilindro di ghiaccio raggiunge circa la metà del recipiente. Il blocco di ghiaccio ottenuto in queste condizioni è sempre assolutamente limpido e privo di difetti. Usando acqua comune e un recipiente metallico abbiamo ottenuto così dei monocristalli di ghiaccio perfetti sotto forma di cilindri alti circa 6 cm e di circa 9 cm di diametro <sup>(3)</sup>.

La direzione dell'asse ottico coincide per lo più con l'asse del blocco cilindrico, è quindi press'a poco perpendicolare alla superficie di raffreddamento o, più esattamente, parallela al gradiente di temperatura. L'asse ottico si rivela quindi una direzione preferita di crescita.

*b) Metodo di Kyropoulos.* — Per la fabbricazione di monocristalli di ghiaccio abbiamo anche usato il metodo che è stato sviluppato da KYROPOULOS <sup>(5)</sup> per la fabbricazione di cristalli dalla sostanza fusa, particolarmente adatto quando una direzione di crescita sia favorita rispetto alle altre.

Il principio del metodo è il seguente: un monocristallo opportunamente orientato (germe) viene portato in contatto con la superficie libera della so-

---

<sup>(3)</sup> L'influenza del materiale di cui è fatto il recipiente e della purezza dell'acqua è discussa dettagliatamente nell'articolo <sup>(4)</sup>.

<sup>(4)</sup> F. JONA e P. SCHERRER: *Helv. Phys. Acta*, **24**, (1951), in corso di stampa.

<sup>(5)</sup> S. KYROPOULOS: *Zeits. f. Phys.*, **63**, 849 (1930).

stanza fusa, la cui temperatura è di poco superiore al punto di fusione. Un dispositivo permette di raffreddare continuamente il germe, il quale durante la crescita viene lentamente sollevato in modo che il monocristallo rimanga sempre in contatto con la superficie libera della sostanza fusa.

Nel nostro caso il raffreddamento del germe avviene automaticamente per conduzione termica attraverso il supporto metallico che lo sostiene, la cui temperatura è quella dell'aria ambiente:  $-20^{\circ}\text{C}$ . Il supporto, che è costituito da un massiccio cilindro di rame con asse verticale alto 50 cm e di 6 cm di base, può venire sollevato od abbassato a piacere parallelamente all'asse per mezzo di una vite micrometrica. Il germe è fissato alla parete esterna della base del cilindro di rame in modo che il suo asse ottico sia verticale. Abbassando il supporto, la parte inferiore del germe viene messa in contatto con la superficie libera dell'acqua in modo che il germe fonda per uno spessore di circa 2 mm. Inizialmente l'acqua, contenuta in un recipiente metallico, viene riscaldata in modo che la sua temperatura si mantenga costante a 6 o  $7^{\circ}\text{C}$ . In seguito la temperatura dell'acqua viene progressivamente diminuita ed in pari tempo il germe viene lentamente sollevato per mezzo della vite micrometrica. La velocità di sollevamento del cristallo che viene formandosi è naturalmente una funzione del diametro del recipiente e della sezione del germe stesso. Con germi aventi dimensioni trasversali dell'ordine di 5 o 6 cm e recipienti di 9 cm di diametro la velocità di sollevamento più favorevole è di circa 0,5 mm all'ora. La temperatura dell'acqua non viene mai abbassata al di sotto di 2 o  $3^{\circ}\text{C}$ .

In circa sei giorni si ottengono con questo metodo monocristalli di ghiaccio di forma press'a poco cilindrica di  $5 \div 6$  cm di diametro e  $10 \div 12$  cm di altezza. Il materiale è assolutamente limpido e senza difetti, il che è attribuibile essenzialmente al fatto che la direzione di crescita del germe è parallela all'asse ottico. I germi obbligati a crescere in direzione perpendicolare a quella dell'asse ottico forniscono blocchi di materiale policristallino, per lo più non trasparente e ricco di difetti.

### 3. — Metodo di misura.

Il metodo di misura usato è quello ultrasonoro di SCHAEFER e BERGMANN <sup>(6)</sup> per la determinazione delle costanti elastiche di corpi trasparenti.

Per mezzo di una piastrina di quarzo piezoelettrico in vibrazione vengono eccitate nel corpo in istudio delle oscillazioni proprie di elevata frequenza. Si viene creando in tal modo, all'interno del corpo, un complicato sistema di onde elastiche che si propagano in tutte le direzioni e danno luogo in ogni

---

<sup>(6)</sup> C. SCHAEFER e L. BERGMANN: *Sitzungsber. d. Berl. Akad.*, (1935).

punto ad una variazione periodica della densità e quindi dell'indice di rifrazione, funzione del punto considerato. Per un fascio di luce monocromatica che attraversi la sostanza in una direzione qualsiasi, il mezzo si comporta quindi a tutti gli effetti come un reticolo a tre dimensioni sul quale ha luogo un fenomeno di riflessione di Bragg.

La « figura di diffrazione » ottenibile si rivela indipendente dalla forma del cristallo studiato e dipendente invece dalla direzione in cui il fascio di luce attraversa il cristallo stesso. Fra la figura di diffrazione osservata e le costanti elastiche del cristallo studiato esiste una stretta interdipendenza.

Una teoria che voglia spiegare il carattere di tale interdipendenza deve studiare la distribuzione dei massimi e minimi di densità e collegare la figura di diffrazione con i modi di oscillazione. Partendo dall'ipotesi che le dimensioni del corpo studiato siano grandi rispetto alla lunghezza d'onda elastica (condizione che è sempre soddisfatta nelle esperienze eseguite) il problema si riduce allo studio del complesso di onde elastiche piane possibili in un mezzo elastico di dimensioni infinite per una pulsazione di eccitazione  $\omega$ .

La teoria è stata fatta da FUES e LUDLOFF (7): dato il potenziale elastico del mezzo:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\alpha'\beta'} c_{\alpha\beta\alpha'\beta'} \frac{\partial \xi_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \xi_{\alpha'}}{\partial x_{\beta'}},$$

ove gli indici  $\alpha, \beta, \alpha'$  e  $\beta'$  variano da 1 a 3, gli  $\xi_{\alpha}$  e rispettivamente  $\xi_{\alpha'}$  sono le componenti dei due vettori di spostamento di due punti vicini nel mezzo, ed infine i  $c_{\alpha\beta\alpha'\beta'}$  sono le costanti elastiche del mezzo per cui vale

$$c_{\alpha\beta\alpha'\beta'} = c_{\beta\alpha\alpha'\beta'} = c_{\alpha\beta\beta'\alpha'} = c_{\beta\alpha\beta'\alpha'} = c_{\alpha'\beta'\alpha\beta};$$

si ricava facilmente l'equazione differenziale del movimento oscillatorio nella forma seguente:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_{\alpha}}{\partial t^2} = \sum_{\beta\alpha'\beta'} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left( c_{\alpha\beta\alpha'\beta'} \frac{\partial \xi_{\alpha'}}{\partial x_{\beta'}} \right),$$

ove  $\rho$  è la densità del mezzo e  $\alpha = 1, 2, 3$ .

La soluzione di questa equazione viene data sotto forma di un'onda elastica piana:

$$S = a \cdot \exp [i(Kr - \omega t)].$$

Introducendo la soluzione nell'equazione differenziale si ottiene un sistema di tre equazioni lineari ed omogenee per la determinazione del vettore d'am-

(7) E. FUES e L. LUDLOFF: *Sitzungsber. d. Berl. Akad.*, (1935).

piezza  $\alpha$ :

$$(1) \quad \sum_{\alpha'} (\sum c_{\alpha\beta\alpha'\beta'} K_{\beta} K_{\beta'} - q\omega^2 \delta_{\alpha\alpha'}) a_{\alpha'} = 0,$$

ove

$$\delta_{\alpha\alpha'} = \begin{cases} 1 & \text{per } \alpha = \alpha' \\ 0 & \text{per } \alpha \neq \alpha' \end{cases}.$$

Ora, affinchè esistano soluzioni non banali di questo sistema occorre che il determinante  $D$  dei coefficienti si annulli, il che fornisce una relazione del tipo

$$(2) \quad D(\omega, q, c_{\alpha\beta\alpha'\beta'}, K_{\alpha}) = 0.$$

Questa equazione, di 6° grado in  $K$ , viene chiamata la relazione di «forma-frequenza» perchè mette in relazione la forma di oscillazione del corpo con la frequenza di eccitazione. Il risultato è quindi il seguente: per ogni frequenza ed ogni direzione di propagazione si hanno nel mezzo tre onde elastiche con tre lunghezze d'onda differenti  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ , i cui vettori di spostamento sono perpendicolari fra di loro.

Riportando a partire da un punto all'interno del corpo studiato in ogni direzione di propagazione  $n$  il vettore d'onda

$$K_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} n, \quad i = 1, 2, 3$$

si ottiene la superficie cosiddetta di forma-frequenza che è in generale di 6° ordine.

La relazione fra la forma di oscillazione e la figura di diffrazione osservata si trova quindi facilmente.

Si dimostra (?) che il raggio  $OX$  della figura di diffrazione (di cui  $O$  sia il centro) è direttamente proporzionale al vettore d'onda elastica  $K$ ,  $OX \sim K$ . La figura di diffrazione quindi non è altro che un figura geometricamente simile alla sezione della superficie di forma-frequenza (2) ottenuta intersecando questa con un piano passante per il centro e perpendicolare alla direzione d'incidenza del raggio luminoso.

La relazione esatta è

$$OX = a \cdot \lambda \cdot \frac{K}{2\pi},$$

ove  $a$  è la distanza fra cristallo e schermo,  $\lambda$  la lunghezza d'onda della luce monocromatica usata e  $K$  il vettore d'onda elastica, ottenuto in funzione delle costanti elastiche  $c_{\alpha\beta\alpha'\beta'}$  dalla relazione di forma-frequenza (2).

La teoria di Fues e Ludloff che abbiamo qui brevemente esposta vale naturalmente solo per cristalli che non mostrino effetto piezoelettrico o ferroelettrico. La cosa si complica per il caso di cristalli ferroelettrici perchè è neces-



sario sapere se le costanti elastiche fornite dall'esperienza di Schaefer e Bergmann siano grandezze elastiche « a campo  $E$  costante » ( $c_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^E$ ) o « a spostamento elettrico  $D$  costante » ( $c_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^D$ ), le quali hanno un diverso comportamento in funzione della temperatura e precisamente al punto di Curie. L'estensione della teoria soprasposta al caso di cristalli piezoelettrici mostra <sup>(8)</sup> che l'esperienza di Schaefer e Bergmann fornisce le grandezze elastiche a « campo costante ».

a) *Specializzazione per il caso del ghiaccio.* — Per i calcoli pratici è più comodo usufruire delle costanti elastiche a due indici ( $c_{ik}$ ) dette anche di Voigt, che non di quelle a quattro indici ( $c_{\alpha\beta\alpha'\beta'}$ ). Le regole per passare dalle une alle altre sono facilmente ricavabili (cfr., per esempio <sup>(8)</sup>). Lo schema delle costanti elastiche  $c_{ik}$  si riduce, per il caso di un cristallo del sistema esagonale, qual'è il ghiaccio, al seguente <sup>(9)</sup>:

$$\begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2)(c_{11} - c_{12}) \end{array}$$

La relazione di forma-frequenza (2) si riduce quindi alla forma seguente:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \left[ K_1^2 c_{11} + K_2^2 \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) + K_3^2 c_{44} - \varrho \omega^2 \right] \left[ K_1^2 \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) + K_2^2 c_{11} + K_3^2 c_{44} - \varrho \omega^2 \right] \\ [(K_1^2 + K_2^2) c_{44} + K_3^2 c_{33} - \varrho \omega^2] + 2 K_1^2 K_2^2 K_3^2 \frac{1}{2} (c_{11} + c_{12})(c_{13} + c_{44})^2 - \\ - K_1^2 K_3^2 (c_{13} + c_{44})^2 \left[ K_1^2 \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) + K_2^2 c_{11} + K_3^2 c_{44} - \varrho \omega^2 \right] - \\ - K_2^2 K_3^2 (c_{13} + c_{44})^2 \left[ K_1^2 c_{11} + K_2^2 \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) + K_3^2 c_{44} - \varrho \omega^2 \right] - \\ - K_1^2 K_2^2 \frac{1}{4} (c_{11} + c_{12})^2 [(K_1^2 + K_2^2) c_{44} + K_3^2 c_{33} - \varrho \omega^2] = 0, \end{array} \right.$$

ove  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ , sono le componenti del vettore d'onda elastica nel sistema degli assi cristallografici  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ .

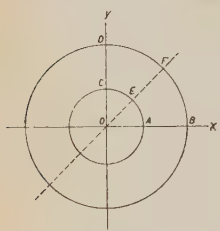
<sup>(8)</sup> F. JONA: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 795 (1950). Un breve riassunto di questo lavoro è stato pubblicato nel *Supplemento al Vol. VII, serie IX del Nuovo Cimento*, 229 (1950).

<sup>(9)</sup> W. VOIGT: *Lehrbuch der Kristallphysik*, (Leipzig 1928, p. 585).

Risulta quindi evidente che per la determinazione delle 5 costanti  $c_{ik}$  che caratterizzano il comportamento elastico di un cristallo di ghiaccio basteranno due figure di diffrazione, una ottenuta per luce incidente in direzione dell'asse ottico  $Z$ , l'altra per luce incidente in direzione dell'asse cristallografico  $X$ .

b) *Luce incidente in direzione dell'asse ottico  $Z$ .* — Sappiamo che intersecando la superficie di forma-frequenza (3) con il piano  $XY$ , ossia ponendo  $K_3 = 0$  nella (3), otteniamo una figura geometricamente simile alla figura di diffrazione. Di quella figura basterà in generale, per semplicità, calcolare la lunghezza dei semiassi e del raggio in direzione della retta a  $45^\circ$  rispetto agli assi <sup>(10)</sup>.

La figura di diffrazione si riduce in questo caso a due cerchi concentrici. Le formule sono:



$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} OA = OC = OE \sim K' = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{c_{11}}} \\ OB = OD = OF \sim K'' = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{(1/2)(c_{11} - c_{12})}} \end{array} \right.$$

Fig. 1.

c) *Luce incidente in direzione dell'asse  $X$ .* — La figura corrispondente si ottiene ponendo  $K_1 = 0$  nell'equazione (3) <sup>(10)</sup>. Le formule sono:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} OA \sim K_{y1} = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{c_{11}}}; & OB \sim K_{y2} = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{c_{44}}}, \\ OC \sim K_{x1} = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{c_{33}}}; & OD \sim K_{x2} = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{c_{44}}}, \\ \frac{OF^2 - OE^2}{OF^2 + OE^2} = \frac{\sqrt{4(c_{13} + c_{44})^2 + (c_{11} - c_{33})^2}}{2c_{44} + c_{11} + c_{33}}. \end{array} \right.$$

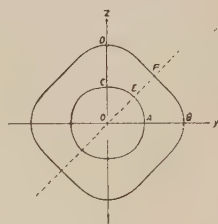


Fig. 2.

Un esame attento della (3) ci convincerà che la superficie di forma-frequenza

<sup>(10)</sup> I calcoli a questo proposito sono riportati per esteso nell'articolo <sup>(4)</sup> degli stessi Autori.

per il sistema esagonale è una superficie di rotazione intorno all'asse ottico. Per convincersene basterà introdurre nella (3) delle coordinate cilindriche, ossia porre:

$$K_1 = r \cos \varphi ,$$

$$K_2 = r \sin \varphi ,$$

$$K_3 = z .$$

La relazione (3) si rivela indipendente dall'angolo  $\varphi$  (<sup>10</sup>). Intersecando quindi la superficie di forma-frequenza con qualsiasi piano passante per l'asse ottico  $Z$  si otterrà sempre la stessa figura. Questo significa che per la determinazione delle costanti  $c_{33}$ ,  $c_{44}$  e  $c_{13}$  (cfr. le formole (5)) non è necessario inviare la luce

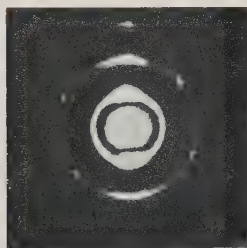


Fig. 3. — Figura di diffrazione del ghiaccio per luce incidente in direzione dell'asse ottico.



Fig. 4. — Figura di diffrazione del ghiaccio per luce incidente in direzione perpendicolare all'asse ottico.

proprio in direzione dell'asse cristallografico  $X$ . Basterà che il fascio luminoso sia perpendicolare all'asse ottico  $Z$ : per qualsiasi delle infinite direzioni perpendicolari all'asse ottico la figura di diffrazione osservata sarà sempre la stessa e precisamente quella rappresentata nella fig. 2.

I diagrammi rappresentati nelle figg. 1 e 2 sono stati ottenuti con un calcolo numerico introducendo nella (3) i valori numerici delle  $c_{ik}$  ottenuti dall'esperienza (e riportati più sotto) e calcolando punto per punto le figure d'intersezione della (3) con i rispettivi piani perpendicolari alla direzione d'incidenza della luce. La similitudine delle figure calcolate 1 e 2 con le figure di diffrazione osservate (figg. 3 e 4) è una conferma dell'esattezza della teoria.

#### 4. — Disposizione sperimentale.

Per le generalità sul metodo di osservazione rinviando il lettore ai lavori di SCHAEFER e BERGMANN <sup>(6)</sup>, di ZWICKER <sup>(11)</sup> e di JONA <sup>(8)</sup>, per i metodi di lavorazione e preparazione dei cristalli di ghiaccio al lavoro <sup>(4)</sup>.

La parte ottica del dispositivo sperimentale da noi usato è costituita da una lampada ad arco di mercurio ad alta pressione (circa 40 atmosfere) con una brillantezza di 40 000 stilb. La luce viene concentrata su di un foro di circa  $300\ \mu$  di diametro, del quale viene ottenuta, per mezzo di una lente, una immagine rimpicciolita circa dieci volte. Questa immagine costituisce la intensa sorgente luminosa puntiforme ( $\sim 30\ \mu$ ) vera e propria. La luce viene resa monocromatica per mezzo di un filtro verde (lunghezza d'onda  $\lambda = 5461\ \text{\AA}$ ).

Un obbiettivo di 16 cm di distanza focale crea un'immagine della sorgente luminosa su di uno schermo (o pellicola fotografica) posto a circa 150 cm di distanza. Il cristallo in esame viene posto immediatamente dopo l'obbiettivo.

Per le fotografie venne usata una pellicola molto sensibile (Kodak Super Panchro Press Sports Type Sheet Film). I tempi di esposizione variano fra 30 secondi e 2 minuti.

Dato lo straordinario riscaldamento del cristallo oscillante (in pochi secondi ha inizio la fusione del cristallo di ghiaccio) l'esposizione del film deve necessariamente avvenire a tappe: il cristallo viene fatto oscillare solo per 2 o 3 secondi, dopo di che vien lasciato raffreddare per circa 2 minuti, e così via. In tal modo si può mantenere la temperatura del cristallo costante a  $\pm 1\ ^\circ\text{C}$ .

La tensione di alta frequenza da applicarsi alla piastrina di quarzo viene fornita da un generatore di 400 W con frequenza variabile fra 7 e 25 MHz <sup>(8)</sup>. Per lo più vennero utilizzate frequenze nell'intervallo da 16 e 20 MHz che erano misurate con un frequenzimetro con errore massimo di  $5 \cdot 10^{-5}$ . Le piastre di quarzo utilizzate avevano tutte una frequenza fondamentale di 500 kHz e diametro variabile fra 30 e 42 mm. La frequenza di oscillazione utilizzata corrispondeva quindi alla  $37^{\text{a}}$  ÷  $41^{\text{a}}$  armonica. La potenza ultrasonora sviluppata era di circa  $2\ \text{W/cm}^2$ , la tensione applicata al quarzo dell'ordine di grandezza di  $10 \div 15\ \text{kV}$ .

I cristalli di ghiaccio esaminati avevano per lo più la forma di parallelepipedi con spigoli variabili fra  $2,2 \times 2,5 \times 2,5\ \text{cm}^3$  e  $3 \times 3 \times 3,5\ \text{cm}^3$ .

---

<sup>(11)</sup> B. ZWICKER: *Helv. Phys. Acta*, **19**, 523 (1946).

## 5. — Risultati.

Per la densità  $\rho$  del ghiaccio abbiamo utilizzato il valore di  $0,92 \text{ g/cm}^3$  dato dalle « International Critical Tables ».

I risultati delle nostre misure per i valori delle cinque costanti elastiche  $c_{ik}$  del ghiaccio sono riportati con i rispettivi errori medi nella tabella seguente per la temperatura di  $-16^\circ\text{C}$ .

$c_{ik}$ in $10^{10}$ dine/cm <sup>2</sup>		
$c_{ik}$	Valori sperimentali	Valori teorici secondo i calcoli di PENNY <sup>(12)</sup>
$c_{11}$	$13,845 \pm 0,08$	15,2
$c_{33}$	$14,99 \pm 0,08$	16,2
$c_{44}$	$3,19 \pm 0,03$	3,2
$c_{12}$	$7,07 \pm 0,12$	8,0
$c_{13}$	$5,81 \pm 0,16$	7,0

Nella colonna a destra sono riportati i valori teorici calcolati per le costanti elastiche del ghiaccio da A. H. A. PENNY <sup>(12)</sup> in base alla teoria dinamica del reticolo cristallino di BORN <sup>(13)</sup>. Per il calcolo numerico delle singole costanti  $c_{ik}$  PENNY deve utilizzare due valori sperimentali (modulo di Young e rapporto di Poisson) misurati su materiale policristallino, dimodochè le cifre riportate più sopra nella tabella sono necessariamente influenzate da questi due valori.

Un paragone più convincente fra teoria ed esperienza si può fare nel modo seguente: secondo la teoria di Penny (che necessariamente si basa, per ragioni di calcolo, su ipotesi inesatte ma semplificatrici sulla struttura cristallina del cristallo di ghiaccio) le cinque costanti elastiche sono legate fra di loro da tre relazioni, e precisamente:

$$(6) \quad c_{11} + c_{12} = c_{33} + c_{13},$$

$$(7) \quad (c_{33} - c_{13})^2 = 2c_{44}(c_{33} - 5c_{13} + 4c_{12}),$$

$$(8) \quad 12c_{13}^2 + 5c_{13}c_{33} - c_{33}^2 + 2c_{44}(5c_{13} + 2c_{33}) = c_{12}(15c_{13} + c_{33} + 14c_{44}).$$

<sup>(12)</sup> A. H. A. PENNY: *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **44**, 423 (1948).

<sup>(13)</sup> M. BORN e G. H. BERGE: *Proc. Roy. Soc., A* **188**, 179 (1947); M. BORN: *Nature* **158**, 830 (1946).



Introducendo i nostri valori sperimentali in queste relazioni otteniamo, rispettivamente:

$$(6) \quad \begin{cases} e_{11} + e_{12} = (20,9 \pm 0,2) \cdot 10^{10} \text{ dine/cm}^2 \\ e_{33} + e_{13} = (20,8 \pm 0,2) \cdot 10^{10} \text{ dine/cm}^2 \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} (e_{33} - e_{13})^2 = (84,3 \pm 4,4) \cdot 10^{20} \text{ dine}^2/\text{cm}^4 \\ 2e_{44}(e_{33} - 5e_{13} + 4e_{12}) = (90,7 \pm 9,5) \cdot 10^{20} \text{ dine}^2/\text{cm}^4 \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} 12e_{13}^2 + 5e_{13}e_{33} - e_{33}^2 + 2e_{44}(5e_{13} + 2e_{33}) = (992 \pm 49) \cdot 10^{20} \text{ dine}^2/\text{cm}^4 \\ e_{12}(15e_{13} + e_{33} + 14e_{44}) = (1038 \pm 27) \cdot 10^{20} \text{ dine}^2/\text{cm}^4. \end{cases}$$

Purtroppo l'errore medio delle singole espressioni è notevole per via della particolare forma delle funzioni delle  $e_{ik}$ . Entro i limiti dell'errore calcolato, tuttavia, le tre relazioni (6), (7), (8) vengono confermate dai nostri valori sperimentali: un risultato sorprendente per una teoria che, come accennammo, si basa su ipotesi non del tutto esatte sulla struttura del reticolo cristallino del ghiaccio!

Secondo le esperienze di ROSSMANN<sup>(14)</sup> un cristallo di ghiaccio si rivela fortemente piezoelettrico e piroelettrico. Purtroppo non sono state effettuate finora misure quantitative dell'effetto piezoelettrico del ghiaccio di modo che non possiamo tener conto dell'influenza che la piezoelettricità avrebbe sul suo comportamento elastico. Ricordiamo in ogni caso che le  $e_{ik}$  fornite dalla nostra esperienza sono grandezze elastiche a campo elettrico  $E$  costante ( $e_{ik}^E$ ).

Anche per il calcolo dei moduli elastici  $s_{ik}$  che riportiamo qui appresso, la piezoelettricità del ghiaccio non è stata, naturalmente, presa in considerazione. Le formole di trasformazione per passare dalle costanti elastiche  $e_{ik}$  ai moduli d'elasticità sono le seguenti:

$$s_{11} + s_{12} = \frac{e_{33}}{c},$$

$$s_{11} - s_{12} = \frac{1}{e_{11} - e_{12}},$$

$$s_{13} = -\frac{e_{13}}{c},$$

$$s_{33} = \frac{e_{11} + e_{12}}{c},$$

$$s_{44} = \frac{1}{e_{44}},$$

ove  $c = e_{33}(e_{11} + e_{12}) - 2e_{13}^2$ .

(14) F. ROSSMANN: *Experientia*, **6**, 182 (1950).

Otteniamo quindi, per la temperatura  $T = -16^\circ\text{C}$ :

$$s_{11} = (1,04 \pm 0,03) \cdot 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{dine}$$

$$s_{33} = (0,85 \pm 0,04) \cdot 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{dine}$$

$$s_{44} = (3,14 \pm 0,03) \cdot 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{dine}$$

$$s_{12} = -(0,43 \pm 0,03) \cdot 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{dine}$$

$$s_{13} = -(0,24 \pm 0,01) \cdot 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{dine}.$$

L'errore medio di ogni singolo valore viene naturalmente anche qui aumentato dalle operazioni di trasformazione.

Infine possiamo calcolare il coefficiente di compressibilità di volume (cfr. (9)):

$$S = 2(s_{11} + s_{12} + 2s_{13}) + s_{33} = \frac{2(c_{33} - 2c_{13}) + c_{11} + c_{12}}{c_{23}(c_{11} + c_{12}) - 2c_{13}},$$

che è, per il ghiaccio a  $-16^\circ\text{C}$ :

$$S = (1,11 \pm 0,07) \cdot 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{dine}.$$

---

## SUMMARY

The object of the present investigation is the determination of the elastic behaviour of single crystals of ice by observing the diffraction of light on supersonic waves (method of Schaefer and Bergmann). Two methods for the growing of single crystals of ice up to 9 cm diameter and 6 cm in height are described. All of the five elastic constants  $c_{ik}$  of these crystals are determined for a temperature of  $-16^\circ\text{C}$ . A comparison of the experimental results with the values calculated theoretically by PENNY shows satisfactory agreement.

## On the Decay of $\mu$ -Mesons.

R. LEVI SETTI

*Istituto di Fisica dell'Università - Milano*

G. TOMASINI

*Istituto di Fisica dell'Università - Genova*

(ricevuto il 10 Novembre 1951)

**Summary.** - From multiple scattering measurement in nuclear emulsions an energy spectrum of the decay particles of the  $\mu$ -mesons is obtained. Our results are analysed with particular regard to the high energy region of the spectrum and then compared with the results reported by other authors on the same subject. From the comparison with the magnetic deflection measurements in Wilson chamber it is possible to estimate the reliability of the results obtained from scattering measurements and to obtain informations on the validity of the scattering theory of Williams-Molière, for the energy interval relative to the considered spectrum. Some examples are described of annihilation and brehmsstrahlung processes which support the hypothesis that the  $\mu$  decay particles are of mass very close to that of the electron.

---

### 1. - Introduction.

The beta decay of the  $\mu$ -meson has been experimentally analysed in detail by several authors from energy measurements on the charged particles ejected by the  $\mu$ -mesons coming to rest in a material medium. Extensive indications concerning the characteristics and the behaviour of the energy spectrum of such decay particles have been reported by STEINBERGER<sup>(1)</sup> from counter

---

<sup>(1)</sup> J. STEINBERGER: *Phys. Rev.*, **75**, 1136 (1949).

experiments, by LEIGHTON *et al.* <sup>(2)</sup> and LAGARRIGUE and PEYROU <sup>(3)</sup> from magnetic deflection measurements in Wilson chamber, by DAVIES *et al.* <sup>(4)</sup>, by O'CEALLAIGH <sup>(5)</sup> and by BRAMSON and HAVENS <sup>(6)</sup> from scattering measurements in nuclear emulsions, and by SAGANE *et al.* <sup>(7)</sup> from spiral orbit spectrometer measurements; <sup>(1)</sup>, <sup>(2)</sup>, <sup>(3)</sup>, <sup>(4)</sup> and <sup>(5)</sup> data are relative to Cosmic Ray  $\mu$ -mesons of both signs, the experiments of <sup>(6)</sup> and <sup>(7)</sup> were performed on cyclotron generated, positive  $\mu$ -mesons.

The results of these authors have demonstrated that the disintegration of the  $\mu$ -meson is of the type  $\mu \rightarrow e + 2\nu$ , and that the spectra obtained are in agreement with theoretical predictions <sup>(8)</sup> <sup>(9)</sup>.

In this paper the results are given of measurements performed by us on  $\mu$ -decay particles in nuclear emulsions by the multiple scattering method. Our energy spectrum is analysed in detail, with particular regard to the high energy region, and then compared with the results of the above mentioned authors. The comparison of our results with the Wilson chamber data gives some useful information on the reliability of the multiple scattering method in the photographic plate. Our measurements were made in part by the angular, in part by the sagitta method; by this way a statistical comparison is obtained of the results given by the use of the two methods, which until now have been compared only on the basis of noise-level measurements <sup>(10)</sup>.

It was assumed until now that the decay particles were electrons, this assumption being justified by measurements which demonstrated that the mass of the decay particles is very close to that of the electron <sup>(2)</sup> <sup>(11)</sup> <sup>(6)</sup>; other phenomena giving support to this point of view are described in this paper.

## 2. — Experimental method.

The tracks suitable for measurements were selected in Ilford G5 plates of 400, 600 and 1200  $\mu$  thickness, exposed at the Observatoire du Pic du Midi (2850 m). The plates have been processed at the Centre de Physique Nucléaire of Brussels. A total of 368 tracks chosen for measurement was obtained from the scanning of about 80 cm<sup>3</sup> of emulsion; of these 278 are of length greater

<sup>(2)</sup> R. B. LEIGHTON, C. D. ANDERSON and A. J. SERIFF: *Phys. Rev.*, **75**, 1432 (1949).

<sup>(3)</sup> A. LAGARRIGUE and C. PEYROU: *Compt. Rend.*, **233**, 478 (1951).

<sup>(4)</sup> J. H. DAVIES, W. O. LOCK and H. MUIRHEAD: *Phil. Mag.*, **40**, 1250 (1949).

<sup>(5)</sup> C. O'CEALLAIGH: communicated at the Copenhagen Meeting, July 1951.

<sup>(6)</sup> H. BRAMSON and W. W. HAVENS: *Phys. Rev.*, **83**, 862 (1951).

<sup>(7)</sup> R. SAGANE, W. L. GARDNER and M. W. HUBBARD: *Phys. Rev.*, **82**, 557 (1951).

<sup>(8)</sup> L. MICHEL: *Proc. Phys. Soc.*, **63**, 514 (1950).

<sup>(9)</sup> J. TIOMNO, J. A. WHEELER and R. R. RAU: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 144 (1949).

<sup>(10)</sup> R. LEVI SETTI: *Nuovo Cimento*, **8**, 96 (1951).

<sup>(11)</sup> E. P. HINKS and B. PONTECORVO: *Phys. Rev.*, **75**, 698 (1949).

than 1 mm, the mean length of these tracks being 3,2 mm. The length of 1 mm has been taken, in our experimental conditions of scattering measurements, to be the minimum length of track required in order to obtain a significant estimate of the energy of the decay particles, over the whole spectrum, and will be therefore considered as a minimum limit for accurate measurements.

All the tracks showing a dip greater than about  $15^\circ$  in the shrunked emulsion have been discarded for two reasons: first in order to have a defined geometrical loss, second because the applied scattering theory of WILLIAMS-MOLIÈRE<sup>(12)</sup> is applicable directly only to tracks forming small angles with the reference plane, in our case the plane of the plate. The multiple scattering measurements have been made by the angular method<sup>(13)</sup> for a part of the tracks, and the sagitta method<sup>(14)</sup> for the other. An ocular protractor was used for angular readings, of the type described by<sup>(13)</sup>, and an ocular micrometer with movable thread was employed for coordinate determinations<sup>(10)</sup>. The noise-level has been determined by measurements on high energy tracks; for the sagitta method a Leitz Ortholux microscope has been used, for which the stage-noise on the  $y$ -axis is very low<sup>(10)</sup>.

The optimum cell length, employed for an accurate determination of the energy of the particles, was determined after a rough estimate of the energy, for each track, given by a preliminary measurement on 10 cells of standard length (50  $\mu$ ). For both methods, on account of the energy interval concerned here, the optimum cell length ranged between 30 and 80  $\mu$ . Overlapping cells have been used for the angular method, and successive cells for the sagitta method. Coordinate readings were made after actual displacement of the stage equal to the cell employed.

The arithmetic mean of the measured angular deviations was considered, corrections for noise and standardisation to degrés/100  $\mu$  being made following the method described by GOLDSCHMIDT<sup>(13)</sup>. The energy was determined from the mean angle of scattering by the use of the curves given by the same author, for electrons (scattering constant equal to 32 MeV  $^\circ/100 \mu^{1/2}$  for tangents, or 26 MeV  $^\circ/100 \mu^{1/2}$  for chords). A cut-off rule has been employed for individual angles greater than  $4\alpha_{sc}$ . The distortion of the emulsions was checked by the method of COSYNS and VANDERHAEGE<sup>(15)</sup>, and was found to be practically negligible for most of the measured tracks.

---

<sup>(12)</sup> E. J. WILLIAMS: *Proc. Roy. Soc.*, **169**, 531 (1939); *Phys. Rev.*, **58**, 292 (1940); G. MOLIÈRE: *Zeits. Naturforschung*, **2a**, 133 (1947); **3a**, 78 (1948).

<sup>(13)</sup> Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT, G. W. KING, H. MUIRHEAD and D. M. RITSON: *Proc. Phys. Soc.*, **61**, 183 (1948); Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT: *Nuovo Cimento*, **7**, 331 (1950).

<sup>(14)</sup> P. H. FOWLER: *Phil. Mag.*, **41**, 169 (1950).

<sup>(15)</sup> M. COSYNS and G. VANDERHAEGE: *Bulletin du Centre de Physique Nucléaire de Bruxelles*, N° 15 (1950).



### 3. - Two observer results.

We will first consider the results obtained from measurements made on tracks  $> 1$  mm. Two distinct groups of tracks have been measured by two observers, one of them using the angular method, the other the sagitta method. The observers were working in different laboratories, and only after good statistics were reached by both, their results have been compared.

Fig. 1 is a plot of the order number of the tracks against their energy, including the 100 tracks measured by the sagitta (*a*) and the first 100 tracks

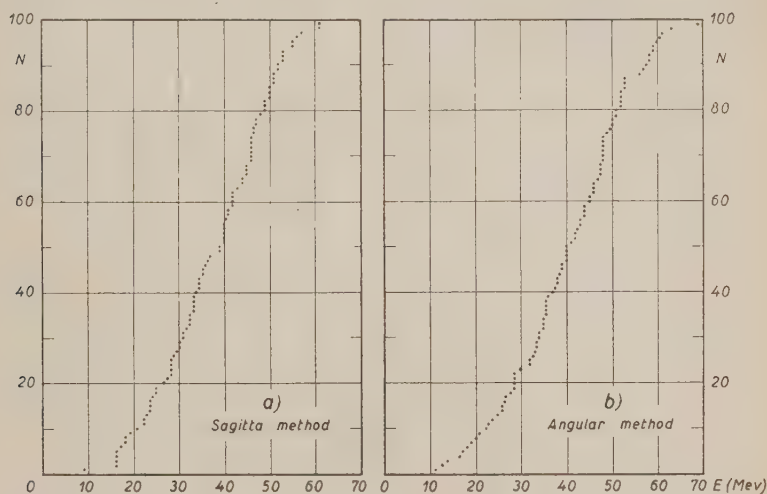


Fig. 1. - Integral spectra of 100 tracks measured with the angular and 100 tracks measured with the sagitta method.

measured by the angular method (*b*). The energies found are ranging in the same limits, from 10 to about 65 MeV, where the intensity becomes zero. The relative differential spectra show a maximum in the same region at about 40 MeV. The mean energy is 37,8 MeV for the group (*a*) and 37,5 MeV for the group (*b*). The absence of energies below 10 MeV is due to the geometrical loss, by which highly scattered tracks are mostly affected, on account of the geometry of the plates. The slope of the two distributions is the same, apart from the small expected statistical fluctuations. The agreement between the (*a*) and (*b*) spectra enables us to be sure that the two different experiments were carried on in comparable conditions and gave us confidence in our own results. The obtained statistical comparison between the two methods of

measurement confirms the agreement between them, already pointed out by LEVI SETTI<sup>(10)</sup>. In the following section the two spectra will be put together, completed with the remaining 78 measured tracks, the sum being justified by the above considerations.

#### 4. — The energy spectrum.

The measured energies are listed in table I, with their probable errors. The mean length of the 278 tracks is 3,2 mm, giving a mean probable error on the energy of 10,8%. This includes a factor of 2% due to smoothing, relative only to the 178 tracks measured by the angular method. The mean probable statistical error only is 9,5%.

TABLE I.

*List of the measured energies of 278  $\mu$ -decay particles, over tracks longer than 1 mm.*

N.	Energy, MeV	N.	Energy, MeV	N.	Energy, MeV
1	$9.4 \pm 1$	29	$22.5 \pm 2.2$	57	$27 \pm 2.2$
2	$11.7 \pm 1.7$	30	$22.5 \pm 2.5$	58	$27 \pm 4$
3	$13 \pm 2$	31	$22.5 \pm 2.8$	59	$27.5 \pm 2$
4	$14 \pm 1.5$	32	$23 \pm 1.5$	60	$28 \pm 1.8$
5	$15 \pm 1.8$	33	$23 \pm 2.3$	61	$28 \pm 2.2$
6	$15.5 \pm 1$	34	$23 \pm 2.7$	62	$28.5 \pm 2.2$
7	$15.5 \pm 1.5$	35	$23.5 \pm 2$	63	$28.5 \pm 2.2$
8	$16.5 \pm 1.4$	36	$23.5 \pm 2.7$	64	$28.5 \pm 2.4$
9	$16.5 \pm 1.4$	37	$24 \pm 2$	65	$28.5 \pm 3$
10	$16.5 \pm 1.5$	38	$24 \pm 2$	66	$28.5 \pm 3$
11	$16.5 \pm 1.6$	39	$24 \pm 2.5$	67	$29 \pm 2$
12	$17 \pm 1.5$	40	$24 \pm 3$	68	$29 \pm 3$
13	$17.5 \pm 1$	41	$24 \pm 3$	69	$29 \pm 3$
14	$17.5 \pm 1.7$	42	$24 \pm 3$	70	$29 \pm 4.5$
15	$18 \pm 1.2$	43	$24.5 \pm 3.1$	71	$29 \pm 4.5$
16	$18.3 \pm 2.2$	44	$25 \pm 2$	72	$29.5 \pm 3$
17	$18.5 \pm 2$	45	$25 \pm 2$	73	$30 \pm 1.8$
18	$18.5 \pm 2.6$	46	$25 \pm 2.5$	74	$30 \pm 3$
19	$19 \pm 1.5$	47	$25 \pm 2.5$	75	$30.5 \pm 2.4$
20	$19 \pm 3$	48	$25 \pm 3$	76	$30.5 \pm 3.3$
21	$19.7 \pm 1.7$	49	$25 \pm 4$	77	$31 \pm 2$
22	$20 \pm 2.5$	50	$26 \pm 1.5$	78	$31 \pm 3.5$
23	$21 \pm 2.5$	51	$26 \pm 1.8$	79	$31 \pm 3.7$
24	$21 \pm 2.8$	52	$26 \pm 1.8$	80	$31 \pm 3.8$
25	$21.5 \pm 3.8$	53	$26 \pm 2.5$	81	$31 \pm 5$
26	$22 \pm 1.5$	54	$26.5 \pm 2.7$	82	$32 \pm 2$
27	$22 \pm 1.8$	55	$26.5 \pm 3$	83	$32 \pm 2.5$
28	$22 \pm 3$	56	$26.5 \pm 4$	84	$32 \pm 2.5$

TABLE I.

N.	Energy, MeV	N.	Energy, MeV	N.	Energy, MeV
85	32 $\pm$ 3	130	38 $\pm$ 5	175	43 $\pm$ 4.5
86	32 $\pm$ 3	131	38 $\pm$ 6	176	43 $\pm$ 5
87	32 $\pm$ 3.8	132	38 $\pm$ 6.5	177	43 $\pm$ 5.5
88	32 $\pm$ 4	133	38.5 $\pm$ 5.5	178	43 $\pm$ 5.8
89	32.2 $\pm$ 3	134	39 $\pm$ 3.5	179	43 $\pm$ 6
90	32.5 $\pm$ 3	135	39 $\pm$ 3.6	180	44 $\pm$ 4.5
91	32.5 $\pm$ 3.2	136	39 $\pm$ 4	181	44 $\pm$ 5
92	33 $\pm$ 3	137	39 $\pm$ 4.2	182	44 $\pm$ 5.5
93	33 $\pm$ 3	138	39 $\pm$ 4.5	183	44 $\pm$ 5.5
94	33 $\pm$ 3	139	39 $\pm$ 6.2	184	44 $\pm$ 6.5
95	33 $\pm$ 3.5	140	39 $\pm$ 8	185	45 $\pm$ 3.5
96	33 $\pm$ 4	141	39.5 $\pm$ 3	186	45 $\pm$ 3.5
97	33 $\pm$ 4.5	142	39.5 $\pm$ 5	187	45 $\pm$ 4.5
98	33 $\pm$ 4.6	143	40 $\pm$ 2	188	45 $\pm$ 5
99	33 $\pm$ 5	144	40 $\pm$ 2	189	45 $\pm$ 5.5
100	33.5 $\pm$ 3.6	145	40 $\pm$ 3	190	45 $\pm$ 6
101	33.5 $\pm$ 4	146	40 $\pm$ 3	191	45.3 $\pm$ 8
102	33.5 $\pm$ 4.1	147	40 $\pm$ 3.5	192	46 $\pm$ 2.5
103	34 $\pm$ 2	148	40 $\pm$ 3.5	193	46 $\pm$ 3
104	34 $\pm$ 2.2	149	40 $\pm$ 3.7	194	46 $\pm$ 3.2
105	34 $\pm$ 2.5	150	40 $\pm$ 3.8	195	46 $\pm$ 4.6
106	34 $\pm$ 3.5	151	40 $\pm$ 4	196	46 $\pm$ 4.5
107	34 $\pm$ 3.5	152	40 $\pm$ 4.5	197	46 $\pm$ 5.5
108	34 $\pm$ 4.3	153	40 $\pm$ 4.5	198	46 $\pm$ 5.5
109	34 $\pm$ 4.3	154	40 $\pm$ 4.6	199	46 $\pm$ 5.8
110	34 $\pm$ 6.5	155	40 $\pm$ 5	200	46 $\pm$ 6
111	34.5 $\pm$ 4	156	40 $\pm$ 5	201	46 $\pm$ 6
112	34.5 $\pm$ 4.4	157	40 $\pm$ 5.2	202	46 $\pm$ 7
113	35 $\pm$ 2	158	40.5 $\pm$ 2.2	203	46 $\pm$ 7
114	35 $\pm$ 2	159	40.5 $\pm$ 5	204	46 $\pm$ 7
115	35 $\pm$ 2.5	160	41 $\pm$ 2	205	46.5 $\pm$ 4.4
116	35 $\pm$ 4	161	41 $\pm$ 5	206	46.5 $\pm$ 4.6
117	35 $\pm$ 6	162	41 $\pm$ 5	207	47 $\pm$ 1.8
118	35.5 $\pm$ 3.4	163	41 $\pm$ 6	208	47 $\pm$ 4.5
119	35.5 $\pm$ 4.8	164	42 $\pm$ 3	209	47 $\pm$ 4.7
120	35.5 $\pm$ 6.2	165	42 $\pm$ 3	210	47 $\pm$ 5
121	35.5 $\pm$ 7	166	42 $\pm$ 3.7	211	47 $\pm$ 5.5
122	36 $\pm$ 2	167	42 $\pm$ 4	212	47 $\pm$ 7
123	36 $\pm$ 2.5	168	42 $\pm$ 4.8	213	47 $\pm$ 9
124	36 $\pm$ 4	169	42 $\pm$ 5	214	48 $\pm$ 2.5
125	36 $\pm$ 5	170	42 $\pm$ 5	215	48 $\pm$ 5.2
126	37 $\pm$ 3	171	42 $\pm$ 5.5	216	48 $\pm$ 5.2
127	37 $\pm$ 3.5	172	42 $\pm$ 5.5	217	48 $\pm$ 6
128	37 $\pm$ 4	173	42 $\pm$ 6	218	48 $\pm$ 6.4
129	38 $\pm$ 2	174	43 $\pm$ 3	219	48 $\pm$ 7

TABLE I.

N.	Energy, MeV	N.	Energy, MeV	N.	Energy, MeV
220	48 $\pm$ 7.8	240	52 $\pm$ 4	260	57 $\pm$ 6.6
221	48 $\pm$ 8	241	52 $\pm$ 4.5	261	57 $\pm$ 8
222	49 $\pm$ 4	242	52 $\pm$ 4.5	262	58 $\pm$ 5
223	49 $\pm$ 5.4	243	52 $\pm$ 4.7	263	58 $\pm$ 5.5
224	49 $\pm$ 7	244	52 $\pm$ 5.8	264	58 <sup>1</sup> $\pm$ 6
225	49 $\pm$ 8	245	52 $\pm$ 6	265	58 $\pm$ 8.5
226	49.5 $\pm$ 6.5	246	52 $\pm$ 7	266	59 $\pm$ 5
227	50 $\pm$ 3	247	52 $\pm$ 8	267	59 $\pm$ 7
228	50 $\pm$ 4	248	53 $\pm$ 4.5	268	59 $\pm$ 10
229	50 $\pm$ 4	249	53 $\pm$ 4.8	269	60 $\pm$ 8
230	50 $\pm$ 4.6	250	53 $\pm$ 6.5	270	61 $\pm$ 7.7
231	50 $\pm$ 5	251	53 $\pm$ 6.9	271	61 $\pm$ 8
232	50 $\pm$ 8	252	53 $\pm$ 7	272	61 $\pm$ 9
233	50.5 $\pm$ 5	253	53 $\pm$ 7.1	273	61 $\pm$ 9.4
234	51 $\pm$ 5.3	254	53 $\pm$ 8	274	62 $\pm$ 7
235	51 $\pm$ 5.8	255	55 $\pm$ 3	275	64 $\pm$ 10
236	51 $\pm$ 6.2	256	55 $\pm$ 5.5	276	65 $\pm$ 8
237	51 $\pm$ 6.5	257	55 $\pm$ 7.4	277	87 $\pm$ 9
238	51 $\pm$ 6.5	258	56 $\pm$ 6.7	278	105 $\pm$ 13
239	51 $\pm$ 8.1	259	56 $\pm$ 8		

In fig. 2 the differential spectrum is given, the numbers of tracks per energy interval of 10 MeV being plotted against the energy. A curve has been

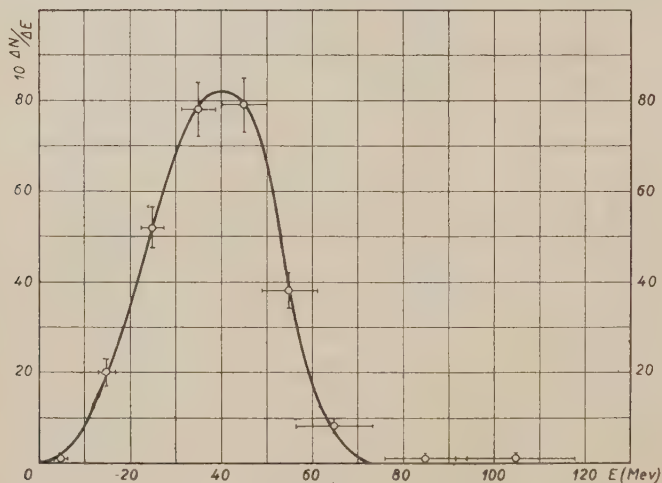


Fig. 2. - Differential energy spectrum of 278 tracks  $> 1$  mm,  $\bar{L} = 3,2$  mm.

drawn to fit the experimental points. The distribution is continuous from 9 to about 65 MeV where the intensity can be taken as zero. The mean energy is 38 MeV. The distribution shows a maximum at about 40 MeV, the end point cannot be given with great accuracy because of the errors inherent in the multiple scattering method on tracks of finite length. The percentage of tracks of energy greater than 55 MeV, is 7%.

In order to see to what extent the statistical fluctuations can affect the determination of the energy of the decay particles, especially when a small number of cells is concerned in a single measurement and in cases where large angles above the cut-off value are present, the following check has been made.

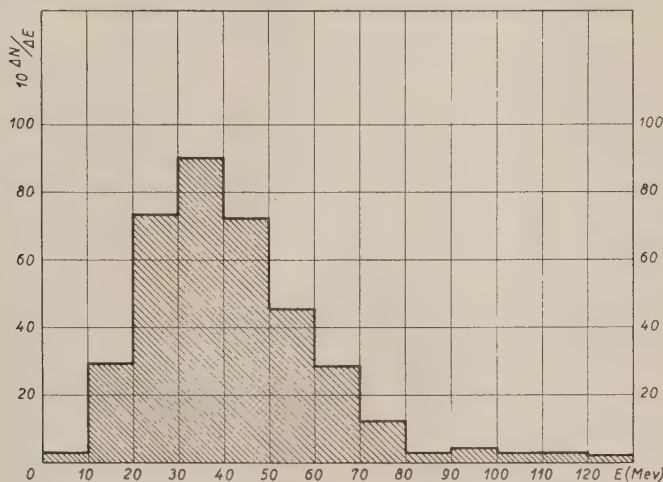


Fig. 3. - Differential energy spectrum of 368 tracks  $< 1$  mm,  $\bar{L} = 0,7$  mm.

All the tracks shorter than 1 mm, giving at least 10 cells of length ranging from 30 to 80  $\mu$ , have been considered, and energy determinations were also made using only the first 10 cells of the tracks  $> 1$  mm. A total of 368 tracks was thus obtained, their energy being calculated on an average length of about 700  $\mu$ , corresponding to the first part of the path of the  $\mu$ -decay particles. The cut-off rule has been applied. The result is shown in the histogram of fig. 3. Energy values up to 140 MeV were found, the number of tracks with energies above 55 MeV was 19%. The intensity is higher than in fig. 2 also in the low energy region, on account of the diminished geometrical loss and greater statistical fluctuations. The maximum is at 35 MeV. In this case the mean error is about 20%. The presence of the large tail above 55 MeV in the spectrum of short tracks, as compared with the long tracks spectrum,



cannot be imputed to a brehmsstrahlung loss effect, both for intensity reasons (see following section) and for the fact that calculations made on 10 cells taken after 2000  $\mu$  range of the decay particles, show also the presence of energies up to more than 100 MeV. On the other hand some tracks have been found showing in the first 700  $\mu$  an energy equal to the half of that calculated from 2000 to 2700  $\mu$  range; the inverse also occurred and the percentage of tracks apparently increasing their energy is of the same order of that of the tracks losing energy. The greater spread is therefore due to the higher statistical fluctuations on short tracks.

Unfortunately it has not been possible to analyse the mesons responsible for the two tracks of 87 and 105 MeV respectively, because of the unfavorable conditions in which they occurred in the emulsion.

### 5. — Annihilation and brehmsstrahlung examples.

All the  $\mu$ -meson decay tracks have been measured in their whole length in emulsion. Three cases were found of particles ending in the emulsion without any increases of ionisation and scattering; these may be interpreted as annihilation processes (<sup>16</sup>).

One tracks is only 50  $\mu$  long, another has a length of 530  $\mu$ , with an energy of  $70 \pm 21$  MeV, but this value cannot be taken as significant because of the insufficient length of the track. The third example has been found in plates exposed in a magnetic field, the length of the track is 4230  $\mu$  and it has therefore been possible to determine both energy and sign of the particle. The energy is  $26 \pm 1.8$  MeV and the sign is positive with 70% probability (<sup>16</sup>).

Some examples have also been found of catastrophic energy loss, interpreted as brehmsstrahlung processes. One track gives in the first 3440  $\mu$  of its range a mean angle of scattering of  $1^\circ/100 \mu$ , corresponding to an energy of  $32 \pm 3$  MeV, then, after a single angle of  $3.6^\circ$ , more than 3000  $\mu$  of the same track have been measured giving a mean angle of  $5.83^\circ/100 \mu$ , or an energy of  $5 \pm 0.6$  MeV. The energy loss in the single photon emission is therefore 85% of the initial energy of the incident particle. The track is at minimum ionisation for its whole length. A second case was observed where the energy loss was not associated to a single large angle of scattering, the energy of the particle is, for the first 1760  $\mu$ ,  $36.5 \pm 3.2$  MeV, then suddenly the scattering increases to give an energy of  $8 \pm 1$  MeV in the following 1660  $\mu$ .

These observations indicate that the  $\mu$ -decay particles are of very small

(<sup>16</sup>) C. C. DILWORTH, S. J. GOLDSACK, Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT and F. LEVY *Phil. Mag.*, **41**, 1032 (1950).

rest mass, in addition to the evidence given by HINKS and PONTECORVO <sup>(11)</sup>, by LEIGHTON *et al.* <sup>(2)</sup>, and by BRAMSON and HAVENS <sup>(8)</sup>.

The brehmsstrahlung energy loss cannot have affected our spectrum in an appreciable way, first because a catastrophic loss ( $> 70\%$ ) is easily identified and in the few cases in which it occurred, the energy considered for the spectrum was that measured before the loss, second because single interactions, escaping observation, in which the energy loss is still important, are expected to be present only in small number among our tracks, short if compared with the radiation length for electrons in emulsion (2,9 cm). In table II are shown the average calculated numbers of emitted photons and their energy, relative to the total length of measured tracks having energies above the critical energy for electrons in emulsion, equal to about 38 MeV. This total length of track corresponds to about 15 radiation lengths.

TABLE II.

$\Delta E$	$N$	% of interested tracks
40 - 50 MeV	1,5	1
30 - 40 »	2,9	2
20 - 30 »	4,7	3,3
10 - 20 »	9,5	6,5

Average number of emitted photons,  $N$ , with energy ranging within  $\Delta E$ .

By considering that the measured energy is an intermediate value between the energy of the electron before and after the eventual radiation loss, correction becomes very small.

## 6. - Comparison with other experiments.

Our results have been compared with those obtained by the other mentioned experimenters in section 1. In fig. 4 are shown the spectra given by LEIGHTON and by LAGARRIGUE, in Wilson chamber, the spectrum from nuclear emulsions obtained by DAVIES and that given by the present experiment.

The maximum of the distributions falls for all the four spectra in the region between 37,5 and 40 MeV. The intensity, for the Wilson chamber results, at the end point at 55 MeV, is about  $1/3$  of that at the maximum; also from our results there is indication for the presence of a non-zero intensity at this limit, comparable with that found by <sup>(2)</sup> and <sup>(3)</sup>. The number of tracks above 55 MeV, due to statistical fluctuations, is 13% of the total number of tracks for the spectrum of DAVIES, it is 7% in our spectrum. This difference

cannot be taken as significant since the statistical weights of the two distributions are very different. The limits of the statistical spread in the high energy region are practically the same.

The results of O'CEALLAIGH show also a more intense tail than ours. This is due, at least in part, to his bigger statistics, which must give a better

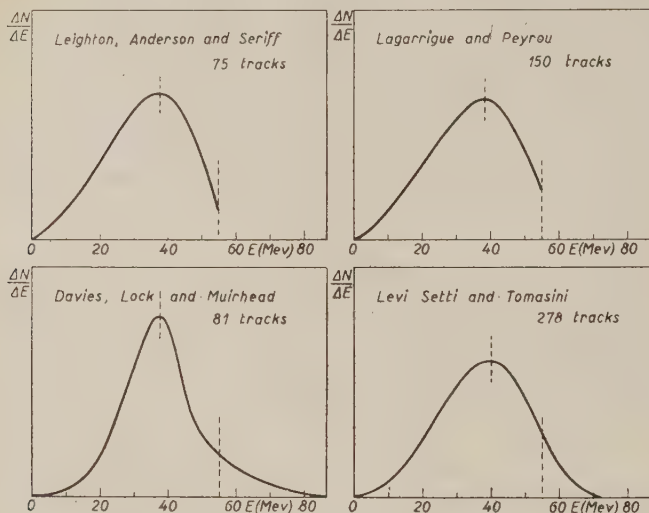


Fig. 4. — Comparison with other experiments.

definition of the tail which must exist in scattering measurements, due to the statistical error on each track.

Professor SCHÖNBERG has pointed out to us that the error on the energy, which depends on  $1/\alpha$  should not be computed by differentiation of the error on  $\bar{\alpha}$ . If this is done it leads to an underestimation of the importance of the tail. A more accurate calculation shows a considerable asymmetry in the error distribution of each track. Naturally, with an increasing number of cells in each track, the importance of the tail diminishes.

## 7. — Conclusions.

The agreement between our results and those obtained with the Wilson chamber can be considered as satisfactory; the behaviour of the respective spectra, in the high energy region, is characteristics of the methods used for energy determinations of the  $\mu$ -decay electrons.

We can say that, in the energy interval concerned here, the scattering methods of measurements, using the theory of Williams-Molière, give results consistent with those obtained by magnetic deflection measurements in the Wilson chamber.

There is no appreciable evidence, at least from experiments at about 3000 m altitude, for the presence of processes other than the ordinary decay of  $\mu$ -mesons into an electron and two neutrinos.

### Acknowledgements.

This paper results from a collaboration between the Centre de Physique Nucléaire of Brussels, and the Universities of Genoa and Pavia, during the stay of LEVI SETTI at the Department of Physics of this last University.

We thank profs. COSYNS, OCCHIALINI and SPECCHIA who organised this collaboration. We acknowledge the assistance given in various parts of the work by them and by prof. BORSELLINO, Miss DILWORTH and prof. SCHÖNBERG.

One of us (G. T.) acknowledges the hospitality and financial assistance of the Centre de Physique Nucléaire of Brussels during a part of the work.

Our thanks are due also to dr. BONETTI for his everwilling cooperation. The plates have been lent by the Centre of Brussels and have been scanned by the team of observers of the Physical Institute of Genoa, to whom we express our gratitude.

### RIASSUNTO

Da misure di scattering multiplo in lastre nucleari si è ottenuto uno spettro di energia delle particelle di disintegrazione dei mesoni  $\mu$ . I nostri risultati vengono analizzati con particolare riguardo alla regione di alta energia dello spettro e quindi messi a confronto con risultati analoghi riportati da altri autori. Dal confronto con le misure di curvatura magnetica in camera di Wilson è possibile ricavare dati sull'attendibilità dei risultati ottenuti da misure di scattering e sulla validità della teoria di Williams-Molière, nell'intervallo di energia relativo allo spettro considerato. Si descrivono alcuni esempi osservati di annichilazione e di brehmsstrahlung che avvalorano l'ipotesi che le particelle di disintegrazione dei mesoni  $\mu$  siano di massa molto prossima a quella dell'elettrone.





# LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

## Sullo stato di polarizzazione dei prodotti della reazione $D + D$ .

M. CINI

Istituto di Fisica dell'Università - Torino (\*)

(ricevuto il 15 Ottobre 1951)

È apparso recentemente uno studio sul problema della polarizzazione dei prodotti della reazione  $D + D$  ( $He^3 + n$  oppure  $H^3 + p$ ) quando le particelle che reagiscono non sono polarizzate <sup>(1)</sup>.

È mio desiderio esporre qualche considerazione su questo argomento facendo uso dei risultati di alcuni calcoli da me eseguiti indipendentemente <sup>(2)</sup>.

La reazione  $D + D$  è stata recentemente studiata dal punto di vista teorico con un certo successo <sup>(3)</sup>: essa presenta caratteristiche che sembrano favorire la possibilità di produrre particelle almeno in parte polarizzate, come un forte accoppiamento spin-orbita ed un contributo alla reazione, anche alle energie più basse ( $< 0,5$  MeV) da parte di onde  $P$ .

Nello stato finale si hanno in tutti i casi due particelle a spin  $1/2$ : poichè esse sono distinguibili, il valor medio dell'osservabile di spin di una di esse, rappresentata dal vettore-matrice di Pauli  $\sigma^{(1)}$  darà la polarizzazione di questa particella nello stato finale: analogamente si può dire per la particella 2. Naturalmente è arbitrario indicare con 1 il neutrone piuttosto che l' $He^3$ .

Lo stato finale sarà esprimibile nel sistema baricentrico delle due particelle prodotte, ad una certa distanza dal centro di collisione, come il prodotto di un'onda sferica uscente per un'ampiezza angolare  $f(\theta, \varphi)$ . In definitiva avremo

$$(1) \quad \bar{\sigma}^{(e)} = \frac{(f^*(\theta, \varphi) \cdot \sigma^{(e)} f(\theta, \varphi))}{(f^*(\theta, \varphi) \cdot f(\theta, \varphi))} \quad e = 1, 2.$$

Il grado, o percentuale di polarizzazione, viene definito come <sup>(4)</sup>:

$$(2) \quad P_e^2 = (\bar{\sigma}_x^{(e)})^2 + (\bar{\sigma}_y^{(e)})^2 + (\bar{\sigma}_z^{(e)})^2.$$

(\*) Attuale indirizzo: Pembroke College, Cambridge, Inghilterra.

<sup>(1)</sup> R. S. BLIN-STOYLE: *Proc. Roy. Soc.*, **64**, 707 (1951). Verrà indicato nel seguito con BS.

<sup>(2)</sup> Nota non pubblicata presentata ai concorsi della S.I.F. 1951.

<sup>(3)</sup> F. M. BEIDUK, J. R. PRUETT e E. KONOPINSKI: *Phys. Rev.*, **77**, 622 e 628 (1950). Questo lavoro (composto di due parti) verrà indicato nel seguito come BPK.

<sup>(4)</sup> v. BS ed inoltre L. WOLFENSTEIN: *Phys. Rev.*, **75**, 1664 (1949), eq. (7).

La distribuzione angolare è stata calcolata in BPK ed è data essenzialmente da:

$$\mathcal{D} = (f^*(\theta, \varphi) \cdot f(\theta, \varphi)),$$

in funzione di certe ampiezze (indipendenti dall'energia)  $\alpha$  e  $\beta$ , per la cui definizione rimandiamo a BPK.

Il numeratore di (1) è pure facilmente calcolato e si ottengono le espressioni generali:

$$(3) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_x^{(1)} = \frac{\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}}{\mathcal{D}}, \\ \bar{\sigma}_x^{(2)} = \frac{-\mathcal{A} - \mathcal{B} + \mathcal{C}}{\mathcal{D}}, \end{cases}$$

dove <sup>(5)</sup>

$$(4) \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2} \sum_{LL'} \sigma_L^{1/2} \sigma_{L'}^{1/2} [(\beta_L \alpha_{L'}^* - \beta_{L'}^* \alpha_L) Y_L^0 (Y_L^1 + Y_{L'}^{-1})]$$

$$(5) \quad \mathcal{B} = \frac{1}{2} \sum_{LL'} \sigma_L^{1/2} \sigma_{L'}^{1/2} \sum_{\lambda\lambda'} \{ (\beta_{LL}^* \delta_{L'\lambda'}^{-1} - \delta_{L\lambda'}^{-1} \beta_{LL}) (Y_L^1 Y_{\lambda'}^{-2} + Y_L^{-1} Y_{\lambda'}^2) - \\ - (\beta_{LL} \delta_{L'\lambda'}^{-1} - \delta_{L\lambda'}^{-1} \beta_{LL}) Y_{\lambda'}^0 (Y_L^1 + Y_L^{-1}) \}$$

$$(6) \quad \mathcal{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{LL'} \sigma_L^{1/2} \sigma_{L'}^{1/2} \sum_{\lambda\lambda'} \{ (\delta_{L\lambda 0}^* \delta_{L'\lambda'}^{-1} - \delta_{L\lambda'}^{-1} \delta_{L\lambda 0}^*) Y_{\lambda}^0 (Y_{\lambda'}^1 + Y_{\lambda'}^{-1}) - \\ - (\delta_{L\lambda 1}^* \delta_{L'\lambda'}^{-1} - \delta_{L\lambda'}^{-1} \delta_{L\lambda 1}^*) Y_{\lambda}^0 (Y_{\lambda'}^1 + Y_{\lambda'}^{-1}) - \\ - (\delta_{L\lambda 1}^* \delta_{L'\lambda'}^{-1} - \delta_{L\lambda'}^{-1} \delta_{L\lambda 1}^*) (Y_{\lambda}^1 Y_{\lambda'}^{-2} + Y_{\lambda}^{-1} Y_{\lambda'}^2) \}.$$

Si possono fare le seguenti considerazioni. Le espressioni  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  sono proporzionali a  $\sin \varphi$ , poichè tanto la combinazione  $Y_{\lambda}^{-1} + Y_{\lambda}^1$  come quella  $Y_{\lambda}^1 Y_{\lambda'}^{-2} + Y_{\lambda}^{-1} Y_{\lambda'}^2$  contengono il fattore  $[\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi)]$ , e contemporaneamente compaiono ovunque i termini del tipo <sup>(6)</sup>  $[a^* b - b^* a]$ , che sono numeri immaginari puri. È facile vedere che  $\bar{\sigma}_y^{(e)}$  si ottiene da  $\bar{\sigma}_x^{(e)}$  con la semplice sostituzione di  $\sin \varphi$  con  $\cos \varphi$ .

<sup>(5)</sup> I simboli sono gli stessi che in BPK tranne che:

$\sum_{LL'}$  significa somma per i valori pari di  $L, L'$   
 $\sum_{LL'}$  " " " " dispari di  $L, L'$   
 $\delta_{LL}^m$  è la grandezza indicata in BPK con  $\gamma_{L, M-m}^m$   
 $\delta_{LL \pm 2}^m$  " " " " "  $\delta_{L \pm 2, M-m}^m$   
 $\lambda$  può assumere i tre valori  $L, L \pm 2$   
 $\lambda'$  " " " "  $L', L' \pm 2$ .

<sup>(6)</sup>  $a$  e  $b$  indicano due qualunque delle grandezze  $\alpha, \beta, \delta$ .

Poichè si trova che  $\bar{\sigma}_z^{(e)} = 0$ , si vede subito che la polarizzazione risultante è perpendicolare al piano dell'urto. In generale si può scrivere

$$(7) \quad P_z = \frac{\sin \theta \cos \theta \sum_n A_n^{(e)} \cos^{2n} \theta}{\sum_n B_n \cos^{2n} \theta},$$

dove i coefficienti  $A_n$  e  $B_n$  sono legati alle ampiezze  $\alpha$  e  $\beta$  da relazioni complicate.

Se non esistono transizioni singoletto-tripletto (come avviene se solo forze tensoriali sono attive) si ha

$$P_1 = P_2.$$

Occorre notare che il valore della percentuale di polarizzazione dipende in modo essenziale dagli sfasamenti tra le diverse onde sferiche. Allo stato attuale le fasi degli elementi di matrice non sono valutabili per via teorica <sup>(7)</sup>, ma alcuni ragionamenti generali portano a supporre come fortemente probabile la presenza di un effetto di polarizzazione. Infatti gli elementi di matrice  $\delta_{LL}$ ,  $\delta_{LL,2}$ ,  $\delta_{LL,-2}$  <sup>(7)</sup> contengono rispettivamente un fattore  $\exp[i\eta_{LL}]$ ,  $\exp[i\eta_{LL,2}]$ ,  $\exp[i\eta_{LL,-2}]$ , dove deve essere  $\eta_{L+2} < \eta_L < \eta_{L-2}$ .

Convieni inoltre notare che, accettando per buona l'ipotesi di BPK

$$a^*b + b^*a = 0,$$

questo equivale ad accettare

$$a^*b - b^*a = 2i |a| |b|.$$

Qualche ulteriore informazione, ed un utile confronto con BS, si ottiene considerando il caso in cui alla reazione contribuiscono apprezzabilmente solo onde S e P.

In questo caso, considerando solo i valori 0,1 di  $L$ ,  $L'$  il termine  $\mathcal{A}$  dà un contributo nullo mentre

$$(8) \quad \mathcal{B} = \sqrt{2} \sigma_1 \sin \theta \cos \theta \{ 3 |\gamma_{10}^1| |\beta_{11}| \sin(\varphi_{\beta 1} - \varphi_0^1) + \sqrt{3/2} |\beta_{12}| |\beta_{11}| \sin(\varphi_{\beta 1} - \varphi_{\beta 2}) \}$$

$$(9) \quad \mathcal{C} = \sqrt{2} \sigma_1 \sin \theta \cos \theta \{ 3 \sqrt{2} [ |\gamma_{10}^0| |\gamma_{11}^{-1}| \sin(\varphi_1^{-1} - \varphi_0^0) + |\gamma_{10}^1| |\gamma_{10}^0| \sin(\varphi_0^1 - \varphi_0^0) + \\ + |\gamma_{10}^1| |\gamma_{11}^{-1}| \sin(\varphi_1^{-1} - \varphi_0^1) ] + \sqrt{3} |\beta_{12}| [ |\gamma_{11}^{-1}| \sin(\varphi_1^{-1} - \varphi_{\beta 2}) - \\ - 3 |\gamma_{10}^0| \sin(\varphi_0^0 - \varphi_{\beta 2}) + 3 |\gamma_{10}^1| \sin(\varphi_0^1 - \varphi_{\beta 2}) ] \}.$$

Si è tenuto conto dell'uguaglianza <sup>(8)</sup>

$$(10) \quad \gamma_{11}^{-1} - \gamma_{11}^0 = \gamma_{10}^0 - \gamma_{10}^1,$$

e si è posto

$$\gamma_{1M-m}^m = |\gamma_{1M-m}^m| \exp[i\varphi_{M-m}^m]; \quad \beta_{12} = |\beta_{12}| \exp[i\varphi_{\beta 2}]; \quad \beta_{11} = |\beta_{11}| \exp[i\varphi_{\beta 1}].$$

L'espressione ottenuta introducendo (8) e (9) nelle (3) coincide con quella trovata in BS tranne che per il fatto che in questo mancano i termini in  $\beta_{12}$ . Sebbene a prima vista questo possa sembrare lecito, ad un esame più approfondito appare che questi termini dovrebbero esser conservati. Infatti  $\beta_{12}$  compare nell'espressione di  $P_1$  come coefficiente di armoniche corrispondenti al valore 1 di  $L$ ,  $L'$ ; e una

<sup>(7)</sup> BPK: pag. 633.

<sup>(8)</sup> BPK: pag. 625.

riprova del fatto che il contributo non è trascurabile si ottiene paragonando i termini in (8) e (9) quando si prendano per i  $\gamma$  ed i  $\beta$  i valori calcolati in BPK: si vede che il prodotto  $|\gamma_{10}^0| |\gamma_{11}^{-1}|$  è dello stesso ordine di quello  $(|\gamma_{10}^1| - |\gamma_{10}^0|) |\beta_{12}|$  pur non potendo dire di più per l'ignoranza dei valori dello sfasamento. Un altro punto che mi sembra necessario sottolineare è che, quando le forze presenti sono solo forze tensoriali, non si può concludere, come in BS<sup>(9)</sup> che la polarizzazione è identicamente nulla. Infatti, pur essendo  $\beta_{11} = 0$  e  $\gamma_{11}^{-1} = -\gamma_{11}^0$ , poichè  $\gamma_{10}^0 \neq \gamma_{10}^1$  l'espressione  $\mathcal{C}$  non si annulla identicamente, e, per le considerazioni sopra svolte è probabilmente diversa da zero.

Si può vedere, senza riportare qui i calcoli in dettaglio, che, assumendo per i moduli delle ampiezze  $\gamma$  e  $\beta$  i valori dedotti teoricamente in BPK si ottiene, con opportuni valori degli sfasamenti, un valore massimo della polarizzazione. Per una energia di 0,2 MeV si ha

$$P_1 = \frac{0,03 \cos \theta \sin \theta}{0,18 + 0,16 \cos^2 \theta},$$

e quindi, in corrispondenza di  $\theta = 48^\circ$  la polarizzazione può raggiungere il 6 %. Per 0,5 MeV si ha un massimo del 9 % a  $51^\circ$ .

Un confronto con l'esperienza sarebbe sommamente desiderabile allo scopo di appurare:

- a) se ambedue le particelle hanno una uguale polarizzazione; nel qual caso l'accoppiamento spin-orbita deriverebbe, almeno in gran parte, da forze tensoriali;
- b) se la percentuale di polarizzazione è maggiore del limite sopra indicato: nel qual caso la teoria di BPK risulterebbe anche in questo caso inadeguata;
- c) se la percentuale di polarizzazione è inferiore al limite o addirittura nulla: nel qual caso si potrebbero ricavare utili informazioni sugli sfasamenti.

Ringrazio il prof. M. VERDE per avermi proposto lo studio del problema. È mio dovere ringraziare anche il C.N.R., in quanto il presente lavoro è stato svolto mentre ero assegnatario di una borsa di studio da parte di questo Ente.

(9) BS: nota a pag. 708.

(10) BPK: pag. 627.

**Su un secondo, terzo e quarto massimo  
osservati nella curva di transizione di Rossi.**

L. ALLEGRETTI e ABD EL-WAHAB KHALIL

*Physics Department, Faculty of Science, Farouk I University - Alexandria, Egypt*

(ricevuto il 12 Novembre 1951)

Dopo che nel 1934 ACKEMANN e HUMMEL <sup>(1)</sup> ebbero osservato un secondo massimo nella curva di transizione di Rossi, molti lavori relativi a questo argomento sono stati pubblicati, alcuni affermando l'esistenza di questo secondo massimo, altri negandola.

Un anno fa, quando questo lavoro fu iniziato, i risultati più recenti e probativi erano quelli di CLAY <sup>(2)</sup>, che affermava la presenza del secondo massimo ed accennava alla probabile presenza di un terzo, avendo sperimentato non solo con variabili spessori di Piombo ma anche di Oro e di Mercurio e quelli di JANOSSY e collaboratori <sup>(3)</sup> che la mettevano in dubbio affermando che l'effetto era mascherato dagli errori sperimentali.

Così i risultati sperimentali relativi al secondo massimo erano contraddittori quando recentemente sono stati pubblicati nuovi lavori di CLAY <sup>(4)</sup>, misure ese-

guite con spessori di Piombo e di Stagno, di BOTHE e THORN <sup>(5)</sup>, di SEN CHAUDHARY <sup>(6)</sup> e di KAMEDA e MIURA <sup>(7)</sup>, i quali tutti sono concordi nel trovare un secondo massimo prossimo ad uno spessore di Piombo di 15 cm ed un terzo massimo per uno spessore di circa 25 cm di Piombo. L'interpretazione teorica rimane oscura, anche del solo secondo massimo, e ciascun autore propone una propria ipotesi esplicativa.

Ora poichè appare che la produzione del secondo massimo deve essere collegata con la produzione degli sciami di elettroni, degli sciami knock-on e degli sciami penetranti, è manifesto l'interesse del problema e noi abbiamo ritenuto opportuno riprenderlo adoperando in questa prima esperienza una disposizione sperimentale analoga a quella usata da CLAY <sup>(4)</sup>.

Quattro contatori A in parallelo sono posti immediatamente sotto le lastre di

<sup>(1)</sup> M. ACKEMANN e J. N. HUMMEL: *Naturwiss.*, **22**, 160 (1934).

<sup>(2)</sup> J. CLAY e W. L. SCHEEN: *Physica*, **14**, 489 (1948).

<sup>(3)</sup> L. JANOSSY: *Proc. Roy. Soc., A* **180**, 219 (1942).

<sup>(4)</sup> W. BOTHE e H. THURN: *Phys. Rev.*, **79**, 545 (1951).

<sup>(5)</sup> P. H. SEN CHAUDHARY: *Phys. Rev.*, **81**, 274 (1951).

<sup>(6)</sup> T. KAMEDA e I. MIURA: *Journ. Scien. Res. Inst. Tokio*, **45**, 65 (1951).

<sup>(7)</sup> J. CLAY e G. KLEIN: *Physica*, **16**, 293 (1950).



Piombo come è mostrato nell'angolo alto della figura. Altri quattro contatori *B*, *C*, *D*, *E*, sono posti sotto i primi a una distanza di 10 cm.

I contatori adoperati (cm 4 di diametro, cm 40 di lunghezza utile) sono in vetro (spessore delle pareti mm 1,5)

blocco di Piombo che così si formava sopravanzava largamente da tutti i lati la disposizione dei contatori tanto da togliere ogni dubbio che le condizioni geometriche dell'esperienza variassero all'aumentare dello spessore; le misure sono state eseguite fino a spessori di 40 cm.

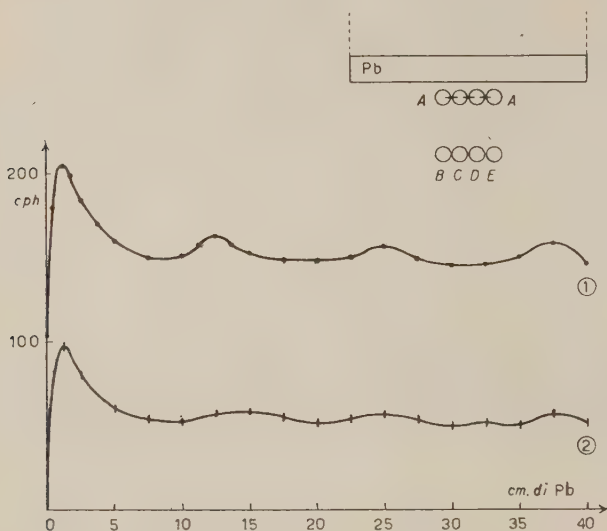


Fig. 1. - La curva (1) corrisponde alle coincidenze triple *ACD*, la curva (2) alle coincidenze triple *ABE*.

con sottile catodo di rame (spessore 0,1 mm) riempiti della nota miscela di Trost di Argon e alcool. Per la registrazione erano adoperati due circuiti alla Rossi per coincidenze triple con un potere risolutivo migliore di  $10^{-5}$  secondi.

Si contano contemporaneamente le coincidenze triple fra il vassoio di contatori *A* e i due contatori *C*, *D* e quelle fra *A* e i due contatori *B*, *E*. Le misure sono state eseguite al livello del mare sulla terrazza dell'Istituto di Fisica di Alessandria d'Egitto (latitudine  $31^{\circ},2$  N, longitudine  $29^{\circ},9$  E, latitudine geomagnetica  $28^{\circ},5$  N) sperimentando con spessori di Piombo generalmente variabili di 2,5 cm, ma con la possibilità di compiere le misure anche ogni 0,5 cm. Il

Il numero delle coincidenze triple registrate per ora relative ai contatori *ACD* sono rappresentate dalla curva (1) e quelle relative alle coincidenze *ABE* nella curva (2); i piccoli segmenti rappresentano per ogni punto l'errore probabile calcolato in relazione al numero delle coincidenze osservate.

Dall'andamento delle curve (1) e (2) si può affermare che:

a) un secondo massimo è stato nettamente osservato nelle due condizioni sperimentali e la sua posizione si trova fra i 12,5 cm e i 15 cm di Piombo;

b) che un terzo e un quarto massimo appaiono sufficientemente precisi nella curva (1), più appiattiti nella cur-

va (2), corrispondenti a spessori di circa 25 cm e a spessori di circa 37,5 cm;

c) che, nelle nostre condizioni sperimentali, gli sciami di almeno due particelle prodotti con piccola apertura angolare sono circa il triplo di quelli prodotti con grande apertura angolare;

d) che, almeno fino a 40 cm di spessore nel Piombo, il numero dei secondari prodotti è maggiore di ogni assorbimento.

In conseguenza dei precedenti risultati crediamo di poter affermare la presenza del secondo massimo e di richiamare l'attenzione sul terzo e sul quarto massimo che nelle nostre esperienze si presentano nel Piombo per spessori multipli di 12,5 cm. Per tali valori la diminuzione per assorbimento in un incre-

mento di spessore  $dx$  è compensata da un aumento nella produzione dei secondari nello stesso spessore  $dx$ .

È difficile spiegare gli sciami e le coppie che sono responsabili del secondo massimo con uno dei noti processi di interazione poichè almeno fino ad oggi non appare possibile trovare alcuna relazione con gli sciami di mesoni penetranti connessi con la produzione di stelle <sup>(3)</sup>. Così non saranno facilmente spiegabili il terzo e il quarto massimo, tanto più, se, come afferma BOTHE <sup>(3)</sup>, la loro posizione dipende notevolmente dalla pressione barometrica.

Siamo grati al prof. dr. M. EL-SHERBINI, direttore dell'Istituto di Fisica, per i mezzi che ha voluto mettere a nostra disposizione e vivamente lo ringraziamo.

## Regolarità nei dati spettroscopici di molecole biatomiche formate con atomi del 4° e 6° gruppo.

G. LOVERA

*Istituto di Fisica dell'Università - Modena.*

(ricevuto il 20 Novembre 1951)

Se si assume, per l'energia potenziale di legame dei due atomi di una molecola biatomica nello stato fondamentale, in funzione della distanza internucleare  $r$ , una espressione del tipo:

$$(1) \quad U = -\frac{\alpha}{(r+d)^m} + \frac{\beta}{(r+d)^n},$$

con  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $d$  costanti (la (1) è più comunemente usata con  $d=0$ ), si trovano, per la costante delle forze di richiamo  $K$ , che è legata alla frequenza di vibrazione  $\nu$  dalla relazione

$$(2) \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{\mu}},$$

( $\mu$  massa ridotta), e per l'energia di dissociazione  $E_D$  nello stato fondamentale, le note relazioni:

$$(3) \quad K = \frac{m(n-m)\alpha}{(r_e+d)^{m+2}},$$

$$(4) \quad E_D = \frac{\alpha}{(r_e+d)^m} \left(1 - \frac{m}{n}\right),$$

$$(5) \quad \frac{K}{E_D} = \frac{mn}{(r_e+d)^2},$$

essendo  $r_e$  la distanza internucleare di equilibrio.

Con le (3), (4), (5), ho cercato di

inquadrare i dati forniti da VAGO e BARROW <sup>(1)</sup>, riguardanti un cospicuo complesso di composti biatomici tra atomi del 4° e 6° gruppo del sistema periodico. In effetti è risultato che formule del tipo suddetto riproducono bene, simultaneamente, i dati sperimentali in questione. Col metodo dei minimi quadrati, sono stati calcolati i valori delle rispettive costanti numeriche, e si sono ottenute così le relazioni seguenti ( $K$  in dyn cm<sup>-1</sup>;  $E_D$  in erg;  $K/E_D$  in cm<sup>-2</sup>;  $r_e$  in Å):

$$(6) \quad K = \frac{287,4}{(r_e+1)^{3,75}} \cdot 10^5,$$

$$(7) \quad E_D = \frac{63,53}{(r_e+1)^{1,75}} \cdot 10^{-12},$$

$$(8) \quad \frac{K}{E_D} = \frac{45,24}{(r_e+1)^2} \cdot 10^{16}.$$

che corrispondono a:  $d = 1 \text{ Å}$ ;  $m = 1,75$ ;  $n = 25,85$ ;  $\alpha = 6,81_5 \cdot 10^{-25}$  (CGS).

In particolare, i numeri d'onde delle vibrazioni molecolari vengono rappresen-

<sup>(1)</sup> E. E. VAGO e R. F. BARROW; *Contribution à l'étude de la structure moléculaire* (Liège. 1948), pp. 201-210.

tati dalla formula:

$$(9) \quad \tilde{\nu} = \frac{2,846 \cdot 10^4}{\sqrt{\mu(r_e + 1)^{3,75}}}$$

( $\tilde{\nu}$  in  $\text{cm}^{-1}$ ;  $\mu$  in  $10^{-24}$  g;  $r_e$  in Å).

La tabella I, che pone a raffronto i

numeri d'onda  $\tilde{\nu}$  sperimentali con quelli calcolati dalla (9), comprova la precisione notevole con cui questa formula riproduce i dati osservati. L'errore medio percentuale, media dei valori assoluti degli errori percentuali singoli, ammonta soltanto a 1,5%.

TABELLA I. - Numeri d'onde delle vibrazioni molecolari.

Molecola	$r_e$ (Å)	$\tilde{\nu}$ calc. ( $\text{cm}^{-1}$ )	$\tilde{\nu}$ osserv. ( $\text{cm}^{-1}$ )	Diff. %
CO	1,128	2 047,5	2 168,2	— 5,6
SiO	1,510	1 232,9	1 242,0	— 0,7
GeO	1,651	980,7	985,7	— 0,5
SnO	1,838	832,2	822,5	+ 1,2
PbO	1,923	762,7	721,8	+ 6,3
CS	1,536	1 306,0	1 285,1	+ 1,6
SiS	1,929	762,2	749,7	+ 1,7
GeS	2,06 <sup>(2)</sup>	575,4	575,8	— 0,1
SnS	2,27	476,8	488,3	— 2,3
PbS	2,395	423,8	428,1	— 1,0
CSe	1,735 <sup>(2)</sup>	1 037,3	1 036,0	+ 0,1
SiSe	2,14 <sup>(2)</sup>	568,2	580,0	— 2,0
GeSe	2,19 <sup>(2)</sup>	408,1	406,8	+ 0,3
SnSe	2,37 <sup>(2)</sup>	328,8	331,2	— 0,7
PbSe	2,53 <sup>(2)</sup>	274,5	277,4	— 1,0
SiTe	2,34 <sup>(2)</sup>	480,1	481,2	— 0,2
GeTe	2,39 <sup>(2)</sup>	329,2	323,4	+ 1,8
SnTe	2,57 <sup>(2)</sup>	259,1	259,5	— 0,2
PbTe	2,73 <sup>(2)</sup>	210,6	211,8	— 0,6

(<sup>2</sup>) K. M. GUGGENHEIMER: *Proc. Phys. Soc.*, **58**, 456 (1946).





## LIBRI RICEVUTI E RECENSIONI

EMANUELE FOÀ: *Fondamenti di Termodinamica*, a cura di ARTURO GIULIANINI, pag. 255, L. 3.000, Ed. Zanichelli, Bologna 1951.

Questi *Fondamenti di Termodinamica* di EMANUELE FOÀ mantengono compiutamente quanto il titolo promette. È difficile, in simile materia, poter parlare di originalità, ma certamente si può dire che questo libro rivela a pieno la personalità dell'Autore, attraverso l'organica omogeneità delle varie parti ed il compenetrarsi dell'astratto rigore logico dei principi con la sicura intuizione fisica dell'esperienza e del problema tecnico.

L'Autore segue generalmente la falsariga tradizionale e, dove se ne allontana, lo fa a ragion veduta e con chiara visione delle esigenze didattiche. Dopo un capitolo di premesse (I), tratta nel II il primo principio della Termodinamica, identificandolo, a nostro avviso con ragione, col principio di equivalenza e considerando il concetto di quantità di calore come già acquisito dall'esperienza; introduce quindi l'energia interna e l'entalpia, fornendone immediate applicazioni. Il capitolo III è dedicato al secondo principio (postulati di Clausius e di Kelvin-Planck), al concetto di invertibilità (opportuno distinto in invertibilità « interna » e « completa »), al teorema di Carnot, alla temperatura termodinamica assoluta, al concetto di entropia. Segue un capitolo dedicato ai gas perfetti, uno ai vapori saturi, uno ai vapori surriscaldati e gas reali, e uno alle miscele di gas e vapori. Nel capitolo VIII vengono introdotti i potenziali di Helmholtz e di Gibbs e dedotte

le principali relazioni termodinamiche generali (di Maxwell, tra  $c_p$  e  $c_v$ ; etc.). I capitoli IX, X, XI e XII sono dedicati alle applicazioni dei principi alle reazioni chimiche e relativi equilibri. Chiudono il volume (cap. XIII) i « Cenni sulla teoria delle motrici termiche e delle macchine frigorifere ».

Il libro esce postumo e manca quindi della prefazione dell'Autore, ma la scelta degli argomenti, l'impostazione di certi problemi e l'indirizzo della trattazione, fanno ragionevolmente presumere che il libro fosse destinato agli Ingegneri (o studenti di Ingegneria) ed ai tecnici che, per amor di sapere o per necessità professionali, sentono il bisogno di una esauriente trattazione dei principi della termodinamica che non perda mai di vista le vaste possibilità di applicazione concreta, anche a problemi tecnici. A nostro avviso, tuttavia, il libro, per le sue doti di esposizione lucida e precisa, in cui si passa senza soluzione di continuità dalla rigorosa formulazione dei principi generali alla compiuta analisi di concreti problemi particolari, incontrerà il favore di una cerchia anche più vasta di lettori, come i fisici, troppo spesso portati a trascurare le applicazioni della propria scienza ed abituati (ahimè, spesso, con piena ragione) ad arricciare il naso di fronte a certi trattati tecnici che confondono il metodo sperimentale con l'empirismo. Naturalmente il fisico potrebbe forse desiderare almeno un cenno all'impostazione statistica della termodinamica, o gradire una breve discussione degli effetti termoelettrici, o un cenno alla presentazione del I e II principio secondo CARATHEODORY-BORN, ma, a no-

stro avviso, una trattazione adeguata di tali argomenti avrebbe portato il libro troppo lontano dal suo scopo, e bene ha fatto perciò l'Autore a tacerne del tutto.

Al GIULIANINI che amorosamente ha curato l'edizione e la stesura definitiva di alcune parti non credo possa esser fatto elogio migliore che questo: certamente chiunque ebbe la ventura di conoscere il suo Maestro, riconoscerà in queste pagine lo stile piano e preciso, la matura esperienza, l'acuto ingegno e la sicura dottrina di Lui.

I pochi errori di stampa occorsici nella lettura erano già tutti registrati nell'errata corrige, onde non sarà difficile eliminarli in una nuova edizione, per la quale vorremmo anche consigliare un buon indice alfabetico per nomi e materie.

MANLIO MANDÒ

W. FINKELNBURG - *Einführung in die Atomphysik*. 2ª ed., Springer-Verlag, Berlin, 1951; XII + 416 pag.

Gli argomenti che il FINKELNBURG tratta in questo libro sono assai più numerosi di quanto il titolo non lasci prevedere e riguardano praticamente l'intero problema della struttura della materia: infatti dopo i primi tre capitoli dedicati allo studio e alle proprietà degli atomi, degli spettri atomici e della meccanica quantistica, vi è un capitolo di fisica nucleare, uno di fisica molecolare ed infine uno sullo stato solido e liquido.

Di tutti questi argomenti l'Autore cerca di dare, compatibilmente con l'esigua mole del libro un'idea quanto più possibile dettagliata, completa, e soprattutto aggiornatissima (1950) in forma semplice senza appesantire il libro con la discussione di particolari sperimentali o di dimostrazioni matematiche. Il volume risulta così di lettura particolarmente gradevole per il lettore non specializzato ma curioso degli ultimi risul-

tati conseguiti e dei tentativi più recenti per superare le difficoltà che si presentano nei vari campi: vi si può trovare per esempio un cenno ai modelli più nuovi di macchine acceleratrici, alle difficoltà e ai risultati ottenuti dall'elettrodinamica quantistica, ai contatori a cristallo, alla produzione multipla dei mesoni e così via. Sempre appropriate e ben scelte sono le numerose figure che illustrano il libro.

Non c'è da stupirsi che la preoccupazione della completezza e dell'aggiornamento nuoccia alla organicità e alla logicità del libro. Dalla sua lettura è difficile rendersi conto di quelle che sono in ciascun campo le idee essenziali e le esperienze fondamentali e come da esse si possa giungere alla interpretazione dei vari fatti sperimentali. Neppure è facile distinguere quali sono i risultati sicuramente acquisiti da quelli che sono soltanto tentativi di interpretazione ancora sprovvisti di solide conferme sperimentali. Questo difetto è particolarmente evidente nel capitolo dedicato alla fisica nucleare che per voler essere aggiornatissimo risulta estremamente superficiale e acritico: si vedano i cenni alle teorie mesoniche, la discussione sulla lunghezza fondamentale, quella sulle particelle elementari, ecc., che non ci pare possano dare al lettore una solida base su cui fondare uno studio ulteriore. Analoga osservazione vale per parecchi altri argomenti: per citarne uno, le statistiche quantistiche, dove la discussione sugli stati simmetrici e antisimmetrici resta alquanto formale e non permette di penetrare lo spirito essenziale della questione. Del resto tale carattere formalistico si ritrova in genere in tutto il capitolo dedicato alla meccanica quantistica.

In complesso il libro di FINKELNBURG ci sembra più adatto ad una lettura informativa che non a costituire il punto di partenza per uno studio approfondito del problema della struttura della materia.

L. A. RADICATI

IL NUOVO CIMENTO

---

INDICI

DEL VOLUME VIII - SERIE IX

1951

PRINTED IN ITALY



# INDICE SISTEMATICO

## PER NUMERI SUCCESSIVI DEL PERIODICO

N. 1, 1 GENNAIO 1951

F. G. FUMI - On the Form of Molecular Orbitals in Conjugated Rings and Chains . . . . .	pag. 1
L. BERTI - Complementi alla teoria del microscopio in contrasto di fase . . . . .	» 26
A. VON ENGEL - A Survey of Recent Advances in Discharge Physics . . . . .	» 42
L. ROSINO - Caratteri fisici di alcune classi di stelle variabili . . . . .	» 54
E. CORINALDESI - On the Influence of the Particle Structure in the Møller Scattering of $\mu$ -Mesons on Protons . . . . .	» 62

*Lettere alla Redazione:*

A. BERNASCONI e P. CALDIROLA - Sulle correzioni di relatività e di spin per una particella in campo centrale. . . . .	» 71
---	------

<i>Libri Ricevuti e Recensioni</i> . . . . .	» 75
--	------

N. 2, 1 FEBBRAIO 1951

Z. M. I. OLLANO and R. R. ROY - Emission of Neutrons and Protons from $\text{Ne}^{22}$ " by the Bombardement of $\alpha$ -Particles . . . . .	pag. 77
M. M. ADDARIO e S. TAMBURINO - Disintegrazioni nucleari a grande altezza . . . . .	» 82
R. LEVI SETTI - Contribution to the Methods of Measurements of Scattering in the Photographic Plate . . . . .	» 96
B. FERRETTI - Sulla diagonalizzazione della hamiltoniana nella teoria dei campi d'onda e sulla teoria dei sistemi chiusi . . . . .	» 108
M. CECCARELLI, G. QUARENI e A. ROSTAGNI - Sulla radioattività del Potassio . . . . .	» 132

N. 3, 1 MARZO 1951

U. FACCHINI, E. GATTI e E. GERMAGNOLI - Lo spettro di energia delle particelle emesse nella reazione ${}^6_3\text{Li}(n, \alpha){}^3_1\text{H}$ . . . . .	pag. 145
M. VERDE - A further Theoretical Contribution to the Photodisintegration of $\text{H}^3$ and $\text{He}^3$ . . . . .	» 152



M. SCHÖNBERG - Mechanism of the Loss of Energy by Collisions in a Material Medium (I) . . . . .	pag. 159
E. CLEMENTEL - Scattering of Neutrons by Deuterons . . . . .	» 185
A. MANFREDINI - Sulla distribuzione angolare dei rami delle stelle prodotte dalla radiazione cosmica nelle emulsioni fotografiche . . . . .	» 195

*Note Tecniche:*

G.-A. BOUTRY et L. LE BLAN - Un corp noir: étalon de brillance à température ajustable . . . . .	» 207
--	-------

<i>Informazioni</i> . . . . .	» 223
-------------------------------	-------

N. 4, 1 APRILE 1951

GIOVANNI GIORGI ( <i>Necrologio</i> ) . . . . .	pag. 225
---	----------

P. CALDIROLA e P. GULMANELLI - Distribuzione nell'atmosfera delle componenti mesonica ed elettronica della radiazione cosmica . . . . .	» 229
M. SCHÖNBERG - Sur la théorie des perturbations en mécanique quantique . . . . .	» 243
A. LOVATI, A. MURA, C. SUCCI and G. TAGLIAFERRI - Interaction Mean Free Path of the Particles Emitted in Cosmic Ray Nuclear Explosions . . . . .	» 271
D. D. MILLAR - The Transition Effect of Extensive Air Showers . . . . .	» 279

*Lettere alla Redazione:*

C. B. A. MC CUSKER and D. D. MILLAR - A Note on the $V$ Particle . . . . .	» 289
--	-------

<i>Libri ricevuti e Recensioni</i> . . . . .	» 293
--	-------

N. 5, 1 MAGGIO 1951

F. MARIANI - Rappresentazione nomografica dell'urto tra due particelle di dimensioni atomiche . . . . .	pag. 297
E. GROSSETTI - Sulla distribuzione del campo ultrasonoro nei liquidi . . . . .	» 301
A. CARRELLI e L. RESCIGNO - Misure di conducibilità in alta frequenza con soluzioni dotate di notevole viscosità . . . . .	» 308
S. FRANCHETTI e M. GIOVANNOLLI - Sparpagliamento angolare degli sciami sotto materiale pesante . . . . .	» 312
M. CINI e L. A. RADICATI - Sullo scattering dei mesoni da parte dei nucleoni . . . . .	» 317
R. D. SARD, M. F. CROUCH, D. R. JONES, A. M. CONFORTO and B. F. STEARNS - Neutron Production by Cosmic-Ray Particles at Sea Level and Underground . . . . .	» 326
G. MEULEMANS, G. P. S. OCCHIALINI and A. M. VINCENT - The Wire Method of Loading Nuclear Emulsions . . . . .	» 341

*Note Tecniche:*

M. CHIOZZOTTO - Dispositivo per il controllo automatico della pressione in un impianto ad alto vuoto . . . . .	pag. 345
G. BELLIBONI e M. MERLIN - Sulla discriminazione di particelle fortemente ionizzanti in lastre nucleari . . . . .	" 349
<i>Libri ricevuti e Recensioni</i> . . . . .	" 357
<i>Errata-corrige</i> . . . . .	" 359

## N. 6, 1 GIUGNO 1951

A. GOZZINI - La costante dielettrica nei gas nella regione delle microonde . . . . .	pag. 361
S. VRKLJAN - Über das Schrödingersche Zittern der de Broglieschen Teilchen mit dem Spin 1 vom Typus des Mesons . . . . .	" 369
G. BELLIBONI, L. FABBRICHESI, L. DE MARCO e M. MERLIN - Effetto di transizione delle stelle di disintegrazione in lastre nucleari sotto piccoli spessori. . . . .	" 374
R. RICAMO - Risonanze $(n, n)$ ed $(n, p)$ nel $P^{31}$ e $S^{32}$ . . . . .	" 383
M. SCHÖNBERG - Sur la théorie des perturbations en mécanique quantique (II). Spectres continus et mixtes . . . . .	" 403

*Lettere alla Redazione:*

M. AGENO, M. CHIOZZOTTO e R. QUERZOLI - Modifiche apportate ad un impianto acceleratore per ioni positivi . . . . .	" 433
L. ORSONI - Il fattore di utilizzazione termica in simmetria cilindrica . . . . .	" 434
<i>Libri ricevuti e Recensioni</i> . . . . .	" 437
<i>Atti della Società Italiana di Fisica</i> . . . . .	" 439

## N. 7, 1 LUGLIO 1951

E. GROSSETTI - Su alcune particolarità nella emissione degli ultrasuoni . . . . .	pag. 441
P. BUDINI - Sullo spettro di densità degli sciami estesi dell'aria . . . . .	" 446
H. J. MAEHLY - Zur genäherten Berechnung der Eigenwerte einer Schrödingergleichung . . . . .	" 466
P. BASSI, I. FILOSOFO, C. MANDUCHI e L. PRINZI - Eccesso positivo dei mesoni a 2000 metri . . . . .	" 469
L. GIULOTTO e A. LOINGER - Oscillazioni esterne e calore specifico della calcite . . . . .	" 475

*Note Tecniche:*

O. KOLB - Ein neuer Apparat zum Absuchen und Ausmessen teilchenempfindlicher Platten . . . . .	" 487
--	-------

*Lettere alla Redazione:*

L. CASTOLDI - Di alcune particolarità geometriche dello scattering classico di Rutherford . . . . .	pag. 491
E. CORINALDESI - Charge Fluctuations in Quantum Electrodynamics . . . . .	» 494
A. DRIGO - Sulla magnetizzazione spontanea e il punto di Curie di lamine ferromagnetiche di piccolo spessore . . . . .	» 498
S. GALLONE e G. SALVETTI - A proposito dei momenti magnetici dei nuclei speculari . . . . .	» 502
R. LEVI SETTI e M. MERLIN - Stelle d'evaporazione generate in lamine metalliche . . . . .	» 504
P. CALDIROLA, R. FIESCHI e P. GULMANELLI - Effetto di latitudine sulla distribuzione dei mesoni nell'atmosfera . . . . .	» 508
M. AGENO e R. QUERZOLI - Un'ipotesi sul meccanismo delle scintillazioni nei cristalli organici . . . . .	» 512
<i>Libri ricevuti e Recensioni</i> . . . . .	» 515
<i>Atti della Società Italiana di Fisica</i> . . . . .	» 519

## N. 8, 1 AGOSTO 1951

F. PORRECA - Alcune particolarità sul comportamento degli ultrasuoni nei liquidi . . . . .	pag. 521
M. MERLIN e O. PIERUCCI - Metodo di discriminazione di stelle a 2 rami in emulsioni nucleari . . . . .	» 528
E. R. CAIANIELLO - On the Universal Fermi-type Interaction . . . . .	» 534
M. CINI and L. A. RADICATI - On the Double Scattering of Mesons by Nucleons . . . . .	» 542
G. MORPURGO - Fotoproduzione di mesoni nel Deuterio . . . . .	» 552
N. CARRARA - Mezzi dispersivi che non presentano l'effetto Fizeau-Fresnel . . . . .	» 569

*Note Tecniche:*

C. BERSANO - Un metodo generale di analisi spettrografica quantitativa . . . . .	» 577
R. ASCOLI - Sull'accoppiamento delle «scale di due» . . . . .	» 584

*Lettere alla Redazione:*

C. BALLARIO, B. BRUNELLI, A. DE MARCO e G. MARTELLI - Sulla variazione diurna degli sciami estesi di grande densità a 3500 m s.l.m. . . . .	» 587
W. F. FRY - Short $\mu$ -Meson Tracks from $\pi$ -Meson Decays . . . . .	» 590
G. WATAGHIN - On the Quantum Theory of Fields (I) . . . . .	» 592
G. CHIAROTTI e L. GIULOTTO - Misure di ampiezza di segnali nucleari . . . . .	» 595
M. PAGANELLI e G. QUARENI - Sul legame tra la cattura $K$ e l'emissione $\gamma$ del Potassio 40 . . . . .	» 598
A. GEROSA and R. LEVI SETTI - High Energy Event in Nuclear Emulsions at 4550 m . . . . .	» 601
<i>Informazioni</i> . . . . .	» 603

## N. 9, 1 SETTEMBRE 1951

A. GAMBA - A Theoretical Investigation of the Photodisintegration of the Alpha-Particle (I) . . . . .	pag. 605
A. ALBERIGI QUARANTA, L. MEZZETTI, E. PANCINI e G. STOPPINI - Sulla velocità di migrazione degli elettroni nelle miscele di Argon e Alcool . . . . .	» 618
C. MILONE - Sulla costituzione degli sciami estesi di raggi cosmici . . . . .	» 643
M. SCHÖNBERG - Physical Applications of the Resolvent Operators (I). On the Mathematical Formalism of Feynman's Theory of the Positron . . . . .	» 651
A. F. KIP, C. F. DAVIS, L. JENNINGS, D. REINER e R. MALVANO - Risonanza paramagnetica in alcuni allumi di Cromo a varie temperature . . . . .	» 683
A. BONETTI and G. TOMASINI - Absorption of Slow $\mu$ -Mesons in Nuclear Emulsions . . . . .	» 693
J. THIBAUD et D. PERRIER - Luminosité à la rencontre d'ondes de choc produites par les charges creuses . . . . .	» 705

*Note Tecniche:*

A. LOVATI, A. MURA, G. TAGLIAFERRI e L. TERRA - Una camera di Wilson di grandi dimensioni per ricerche sulla radiazione cosmica . . . . .	» 713
A. BONETTI and G. P. S. OCCHIALINI - Cylindrical Emulsions . . . . .	» 725

*Lettere alla Redazione:*

M. M. ADDARIO INDOVINA - Alcune osservazioni sulla radiazione che genera le stelle a grande altezza . . . . .	» 729
P. BUDINI e G. POIANI - Ricerche di un effetto orario sulla componente penetrante della radiazione cosmica . . . . .	» 732
P. BASSI, A. M. BIANCHI e C. MANDUCHI - Sui fotoni negli sciami estesi dell'atmosfera . . . . .	» 735

<i>Libri ricevuti e Recensioni</i> . . . . .	» 738
--	-------

## N. 10, 1 OTTOBRE 1951

M. DELLA CORTE and M. GIOVANNONZI - An Intrinsic Angular Analysis of Cosmic Ray Stars . . . . .	pag. 741
E. R. CAIANIELLO - On the Universal Fermi-type Interaction (II) . . . . .	» 749
L. MEZZETTI e R. QUERZOLI - Sull'analisi statistica dei risultati di misure eseguite con contatori di Geiger . . . . .	» 768
M. L. VIDALE and M. SCHEIN - High Energy Nuclear Interactions of Cosmic Ray Particles Close to the Top of the Atmosphere . . . . .	» 774
G. SALVINI - Detection of Nuclear Interaction by Means of a Cloud Chamber Containing a Crystal of Sodium Iodide . . . . .	» 798

*Lettere alla Redazione:*

P. BASSI - Sui contatori a radiazione di Cerenkov . . . . .	» 807
---	-------

<i>Libri ricevuti e Recensioni</i> . . . . .	» 811
--	-------

## N. 11, 1 NOVEMBRE 1951

M. SIMONETTA e R. BONELLI - Sul calcolo del più basso livello energetico dell'Ortoelio . . . . .	pag. 813
M. SCHÖNBERG - On the General Theory of Damping in Quantum Mechanics . . . . .	» 817
S. FUBINI - Sui mesoni associati ai grandi sciami . . . . .	» 843
F. BACHELET, M. FERRETTI SFORZINI e F. IPPOLITO - Studio della radioattività di lave vesuviane . . . . .	» 851
R. S. LIOTTA - Annichilamento protone-antiprotone con emissione di mesoni vettoriali neutri e carichi . . . . .	» 857
S. ALBERTONI e M. CUGIANI - Sul problema del cambiamento di variabile nella teoria delle distribuzioni . . . . .	» 874

*Lettere alla Redazione:*

A. CARRELLI e G. BRANCA - Visualizzazione delle onde di viscosità nei liquidi . . . . .	» 889
L. COLLI e U. FACCHINI - Velocità di migrazione degli elettroni in campo elettrico in Argon . . . . .	» 891
R. RICAMO - Studio del livello a 8,20 MeV del $C^{13}$ . . . . .	» 893
G. MIGNONE - Eliminazione della contrazione nelle emulsioni nucleari . . . . .	» 896
<i>Libri ricevuti e Recensioni</i> . . . . .	» 898

## N. 12, 1 DICEMBRE 1951

P. BUDINI - Cattura $K$ del mesone . . . . .	pag. 901
M. FERRETTI SFORZINI - Sul problema della generazione dei mesoni e l'effetto di latitudine (Nota II) . . . . .	» 909
R. ASCOLI - Teoria delle linee di ritardo « compensate » . . . . .	» 914
A. GOZZINI - Sull'effetto Faraday di sostanze paramagnetiche nella regione delle microonde . . . . .	» 928
E. CLEMENTEL e G. PUPPI - Sulla componente nucleonica nell'atmosfera . . . . .	» 936
L. GRILLINI - Un'esperienza mediante reticoli piani per microonde . . . . .	» 952
S. GALLONE, L. ORSONI e C. SALVETTI - Sorgenti di neutroni variabili nel tempo in mezzi moltiplicanti (I) . . . . .	» 960
S. GALLONE e C. SALVETTI - Un modello nucleare asimmetrico . . . . .	» 970
E. TARTAGLIONE - Diffrazione di raggi X da parte di soluzioni acquose di alcuni solfati . . . . .	» 977
F. JONA e P. SCHERRER - Determinazione delle costanti elastiche del ghiaccio . . . . .	» 981
R. LEVI SETTI and G. TOMASINI - On the Decay of $\mu$ -Mesons . . . . .	» 994

*Lettere alla Redazione:*

M. CINI - Sullo stato di polarizzazione dei prodotti della reazione $D + D$ . . . . .	» 1007
L. ALLEGRETTI e M. ABD EL-WAHAB KHALIL - Su un secondo, terzo e quarto massimo osservati nella curva di transizione di Rossi . . . . .	» 1011
G. LOVERA - Regolarità nei dati spettroscopici di molecole biatomiche formate con atomi del 4° e 6° gruppo . . . . .	» 1014
<i>Libri ricevuti e Recensioni</i> . . . . .	» 1017



# INDICE PER AUTORI

Le sigle L., N. T., I., N. d. L., P. D., si riferiscono rispettivamente alle *Lettere alla Redazione*, alle *Note Tecniche*, alle *Informazioni*, alle *Note di Laboratorio*, alle *Proposte e Discussioni*.

ABD EL-WAHAB KHALIL (vedi ALLEGRETTI L.) . . . . .	pag. 1011
ADDARIO M. M. e S. TAMBURINO - Disintegrazioni nucleari a grande altezza . . . . .	» 82
ADDARIO INDOVINA M. M. - Alcune osservazioni sulla radiazione che genera le stelle a grande altezza (L) . . . . .	» 729
AGENO M., M. CHIOZZOTTO e R. QUERZOLI - Modifiche apportate a un impianto acceleratore per ioni positivi (L) . . . . .	» 433
AGENO M. e R. QUERZOLI - Un'ipotesi sul meccanismo delle scintillazioni nei cristalli organici (L.) . . . . .	» 512
ALBERIGI QUARANTA A., L. MEZZETTI, E. PANCINI e G. STOPPINI - Sulla velocità di migrazione degli elettroni nelle miscele di Argon e Alcool . . . . .	» 618
ALBERTONI S. e M. CUGIANI - Sul problema del cambiamento di variabile nella teoria delle distribuzioni . . . . .	» 874
ALLEGRETTI L. e M. ABD EL-WAHAB KHALIL - Su un secondo terzo e quarto massimo osservati nella curva di transizione di Rossi (L.) . . . . .	» 1011
ASCOLI R. - Sull'accoppiamento delle « scale di due » (N. T.) . . . . .	» 584
ASCOLI R. - Teoria delle linee di ritardo « compensate » . . . . .	» 914
BACHELET F., M. FERRETTI SFORZINI e F. IPPOLITO - Studio della radioattività di lave vesuviane . . . . .	» 851
BALLARIO C., B. BRUNELLI, A. DE MARCO e G. MARTELLI - Sulla variazione diurna degli sciami estesi di grande densità a 3500 m s.l.m. (L.) . . . . .	» 587
BASSI P., I. FILOSOFO, C. MANDUCHI e L. PRINZI - Eccesso positivo dei mesoni a 2000 metri . . . . .	» 469
BASSI P., A. M. BIANCHI e M. MANDUCHI - Sui fotoni negli sciami estesi dell'atmosfera (L.) . . . . .	» 735
BASSI P. - Sui contatori a radiazione di Cerenkov (L.) . . . . .	» 807
BELLIBONI G. e M. MERLIN - Sulla discriminazione di particelle fortemente ionizzanti in lastre nucleari (N. T.) . . . . .	» 349
BELLIBONI G., L. FABBRICHESI, L. DE MARCO e M. MERLIN - Effetto di transizione delle stelle di disintegrazione in lastre nucleari sotto piccoli spessori . . . . .	» 374
BERNASCONI A. e P. CALDIROLA - Sulle correzioni di relatività e di spin per un particella in campo centrale (L.) . . . . .	» 71
BERNANO C. - Un metodo generale di analisi spettrografica quantitativa (N. T.) . . . . .	» 577
BERTI L. - Complementi alla teoria del microscopio in contrasto di fase . . . . .	» 26
BIANCHI A. M. (vedi BASSI P.) . . . . .	» 735
BONELLI R. (vedi M. SIMONETTA) . . . . .	» 813
BONETTI A. and G. TOMASINI - Absorption of Slow $\mu$ -Mesons in Nuclear Emulsions . . . . .	» 693
BONETTI A. and G. P. S. OCCHIALINI - Cylindrical Emulsions (N. T.) . . . . .	» 725
BOUTRY G.-A. et L. LE BLAN - Un corp noir; étalon de brillance à température ajustable . . . . .	» 207
BRANCA G. (vedi CARRELLI A.) . . . . .	» 889
BRUNELLI B. (vedi BALLARIO C.) . . . . .	» 587

BUDINI P. - Struttura delle tracce generate da particelle ionizzanti di alta energia (errata corregge) . . . . .	pag. 359
BUDINI P. - Sullo spettro di densità degli sciami estesi dell'aria . . . . .	» 446
BUDINI P. - Cattura $K$ del mesone . . . . .	» 901
BUDINI P. e G. POIANI - Ricerche di un effetto orario sulla componente penetrante della radiazione cosmica (L.) . . . . .	» 732
CAIANIELLO E. R. - On the Universal Fermi-type Interaction (I) . . . . .	» 534
CAIANIELLO E. R. - On the Universal Fermi-type Interaction (II) . . . . .	» 749
CALDIROLA P. (vedi BERNASCONI A.) . . . . .	» 71
CALDIROLA P. e P. GULMANELLI - Distribuzione nell'atmosfera delle componenti mesonica ed elettronica della radiazione cosmica . . . . .	» 229
CALDIROLA P., R. FIESCHI e P. GULMANELLI - Effetto di latitudine sulla distribuzione dei mesoni nell'atmosfera (L.) . . . . .	» 508
CARRARA N. - Mezzi dispersivi che non presentano l'effetto Fizeau-Fresnel	» 569
CARRELLI A. e L. RESCIGNO - Misure di conducibilità in alta frequenza su soluzioni dotate di notevole viscosità . . . . .	» 308
CARRELLI A. e G. BRANCA - Visualizzazione delle onde di viscosità nei liquidi (L.) . . . . .	» 889
CASTOLDI L. - Di alcune particolarità geometriche dello scattering classico di Rutherford (L.) . . . . .	» 491
CECCARELLI M., G. QUARENI e A. ROSTAGNI - Sulla radioattività del Potassio . . . . .	» 132
CHIAROTTI G. e L. GIULOTTO - Misure di ampiezza di segnali nucleari (L.) . . . . .	» 595
CHIOZZOTTO M. - Dispositivo per il controllo automatico della pressione in un impianto ad alto vuoto (N. T.) . . . . .	» 345
CHIOZZOTTO M. (vedi AGENO M.) . . . . .	» 433
CINI M. e L. A. RADICATI - Sullo scattering dei mesoni da parte dei nucleoni . . . . .	» 317
CINI M. and L. A. RADICATI - On the Double Scattering of Mesons by Nucleons . . . . .	» 542
CINI M. - Sullo stato di polarizzazione dei prodotti della reazione $D+D$ (L.) . . . . .	» 1007
CLEMENTEL E. - Scattering of Neutrons by Deuterons . . . . .	» 185
CLEMENTEL E. e G. PUPPI - Sulla componente nucleonica nell'atmosfera . . . . .	» 936
COLLI L. e V. FACCHINI - Velocità di migrazione degli elettroni in campo elettrico in Argon (L.) . . . . .	» 891
CONFORTO A. M. (vedi SARD R. D.) . . . . .	» 326
CORINALDESI E. - On the Influence of the Particle Structure in the Møller Scattering of $\mu$ -Mesons on Protons . . . . .	» 62
CORINALDESI E. - Charge Fluctuations in Quantum Electrodynamics (L.) . . . . .	» 494
CROUCH M. F. (vedi SARD R. D.) . . . . .	» 326
CUGIANI M. (vedi ALBERTONI S.) . . . . .	» 874
DAVIS C. F. (vedi KIP A. F.) . . . . .	» 683
DELLA CORTE M. and M. GIOVANNONZI - An Intrinsic Angular Analysis of Cosmic Rays Stars . . . . .	» 741
DE MARCO A. (vedi BALLARIO C.) . . . . .	» 587
DE MARCO L. (vedi BELLIBONI G.) . . . . .	» 374
DRIGO A. - Sulla magnetizzazione spontanea e il punto di Curie di lamine ferromagnetiche di piccolo spessore (L.) . . . . .	» 498
ENGEL (VON) A. - A Survey of Recent Advances in Discharge Physics . . . . .	» 42
FABBRICHESI L. (vedi BELLIBONI G.) . . . . .	» 374

FACCHINI V., E. GATTI e E. GERMAGNOLI - Lo spettro di energia delle particelle emesse nella reazione ${}^6_3\text{Li}(n, \alpha){}_1^3\text{H}$ . . . . .	pag. 145
FACCHINI V. (vedi COLLI L.) . . . . .	» 891
FERRETTI B. - Sulla diagonalizzazione della hamiltoniana nella teoria dei campi d'onda e sulla teoria dei sistemi chiusi . . . . .	» 108
FERRETTI SFORZINI M. - Sul problema della generazione dei mesoni e l'effetto di latitudine (II) . . . . .	» 909
FERRETTI SFORZINI M. (vedi BACHELET F.) . . . . .	» 851
FIESCHI R. (vedi CALDIROLA P.) . . . . .	» 508
FILOSOFO I. (vedi BASSI P.) . . . . .	» 469
FRANCHETTI S. e M. GIOVANNOZZI - Sparpagliamento angolare degli sciami sotto materiale pesante . . . . .	» 312
FRY W. F. - Short $\mu$ -Meson Tracks from $\pi$ -Meson Decays (L.) . . . . .	» 509
FUBINI S. - Sui mesoni associati ai grandi sciami . . . . .	» 843
FUMI F. G. - On the Form of Molecular Orbitals in Conjugated Rings and Chains . . . . .	» 1
FUMI F. G. - On the Form of Molecular Orbitals in Conjugated Rings and Chains (errata corrige) . . . . .	» 359
GALLONE S., L. ORSONI e C. SALVETTI - Sorgenti di neutroni variabili nel tempo in mezzi moltiplicanti (I) . . . . .	» 960
GALLONE S. e SALVETTI C. - A proposito dei momenti magnetici dei nuclei speculari (L.) . . . . .	» 502
GALLONE S. e SALVETTI C. - Un modello nucleare simmetrico . . . . .	» 970
GAMBA A. - A theoretical Investigation of the Photodisintegration of the $\alpha$ -Particle (I) . . . . .	» 505
GATTI E. (vedi FACCHINI U.) . . . . .	» 145
GERMAGNOLI E. (vedi FACCHINI U.) . . . . .	» 145
GEROSA A. and R. LEVI SETTI - High Energy Event in Nuclear Emulsions at 4550 m (L.) . . . . .	» 601
GIOVANNOZZI M. (vedi FRANCHETTI S.) . . . . .	» 312
GIOVANNOZZI M. (vedi DELLA CORTE M.) . . . . .	» 741
GIULOTTO L. e A. LONGER - Oscillazioni esterne e calore specifico della calcite . . . . .	» 475
GIULOTTO L. (vedi CHIAROTTI G.) . . . . .	» 595
GOZZINI A. - La costante dielettrica nei gas nella regione delle microonde . . . . .	» 361
GOZZINI A. - Sull'effetto Faraday di sostanze paramagnetiche nella regione delle microonde . . . . .	» 928
GRILLINI L. - Un'esperienza mediante reticoli piani per microonde . . . . .	» 952
GROSSETTI E. - Sulla distribuzione del campo ultrasonoro nei liquidi . . . . .	» 301
GROSSETTI E. - Su alcune particolarità nella emissione degli ultrasuoni . . . . .	» 441
GULMANELLI P. (vedi CALDIROLA P.) . . . . .	» 229
GULMANELLI P. (vedi CALDIROLA P.) . . . . .	» 508
IPPOLITO F. (vedi BACHELET F.) . . . . .	» 851
JENNINGS L. (vedi KIP A. F.) . . . . .	» 683
JONA F. e P. SCHERRER - Determinazione delle costanti elastiche del ghiaccio . . . . .	» 981
JONAS D. R. (vedi SARD R. D.) . . . . .	» 326
KIP A. F., C. F. DAVIS, L. JENNINGS, D. REINER e R. MALVANO - Risonanza paramagnetica in alcuni allumi di cromo a varie temperature . . . . .	» 683
KOLB O. - Ein neuer Apparat zum Absuchen und Ausmessen teilchenempfindlicher Platten (N. T.) . . . . .	» 487

LE BLAN L. (vedi BOUTRY G. A.) . . . . .	pag. 207
LEVI SETTI R. - Contribution to the Methods of Measurement of Scattering in the Photographic Plate . . . . .	» 96
LEVI SETTI R. e M. MERLIN - Stelle d'evaporazione generate in lamine metalliche (L.) . . . . .	» 504
LEVI SETTI R. (vedi GEROSA A.) . . . . .	» 601
LEVI SETTI R. and G. TOMASINI - On the Decay of $\mu$ -Mesons . . . . .	» 994
LIOTTA R. S. - Annichilamento protone-antiprotone con emissione di mesoni vettoriali neutri e carichi . . . . .	» 857
LOINGER A. (vedi GIULOTTO L.) . . . . .	» 475
LOVATI A., A. MURA, C. SUCCI and G. TAGLIAFERRI - Interaction Mean Free Path of the Particles emitted in Cosmic Ray Nuclear Explosions . . . . .	» 271
LOVATI A., A. MURA, G. TAGLIAFERRI e L. TERRA - Una camera di Wilson di grandi dimensioni per ricerche sulla radiazione cosmica (N. T.) . . . . .	» 713
LOVERA G. - Regolarità nei dati spettroscopici di molecole biatomiche formate con atomi del 4° e 6° gruppo (L.) . . . . .	» 1014
MAEHLY H. J. - Zur genäherten Berechnung der Eigenwerte einer Schrödinger-Gleichung . . . . .	» 466
MANDUCHI C. (vedi BASSI P.) . . . . .	» 469
MANDUCHI C. (vedi BASSI P.) . . . . .	» 735
MALVANO R. (vedi KIP A. F.) . . . . .	» 683
MANFREDINI A. - Sulla distribuzione angolare dei rami delle stelle prodotte dalla radiazione cosmica nelle emulsioni fotografiche . . . . .	» 195
MARIANI F. - Rappresentazione nomografica dell'urto tra due particelle di dimensioni atomiche . . . . .	» 297
MARTELLI G. (vedi BALLARIO C.) . . . . .	» 587
MC CUSKER C. B. A. and D. D. MILLAR - A Note on the V-Particle (L.) . . . . .	» 289
MERLIN M. (vedi BELLIBONI G.) . . . . .	» 349
MERLIN M. (vedi BELLIBONI G.) . . . . .	» 374
MERLIN M. (vedi LEVI SETTI R.) . . . . .	» 504
MERLIN M. e O. PIERUCCI - Metodo di discriminazione di stelle a due rami in emulsioni nucleari . . . . .	» 528
MEULEMANS G., G. P. S. OCCHIALINI and A. M. VINCENT - The Wire Method of Loading Nuclear Emulsions . . . . .	» 341
MEZZETTI L. (vedi ALBERIGI QUARANTA A.) . . . . .	» 618
MEZZETTI L. e R. QUERZOLI - Sull'analisi statistica dei risultati di misure eseguite con contatori di Geiger . . . . .	» 768
MIGNONE G. - Eliminazione della contrazione nelle emulsioni nucleari (L.) . . . . .	» 896
MILLAR D. D. - The Transition Effect of Extensive Air Showers, . . . . .	» 279
MILLAR D. D. (vedi MC CUSKER C. B. A.) . . . . .	» 289
MILONE C. - Sulla costituzione degli sciami estesi dei raggi cosmici . . . . .	» 643
MORPURGO G. - Fotoproduzione di mesoni nel Deuterio . . . . .	» 552
MURA A. (vedi LOVATI A.) . . . . .	» 271
MURA A. (vedi LOVATI A.) . . . . .	» 713
OCCHIALINI G. P. S. (vedi MEULEMANS G.) . . . . .	» 341
OCCHIALINI G. P. S. (vedi BONETTI A.) . . . . .	» 725
OLLANO Z. M. I. and R. R. ROY - Emission of Neutrons and Protons from $\text{Ne}^{22}$ by the Bombardment of $\alpha$ -Particles . . . . .	» 77
ORSONI L. - Il fattore di utilizzazione termica in simmetria cilindrica (L.) . . . . .	» 434
ORSONI L. (vedi GALLONE S.) . . . . .	» 960

PAGANELLI M. e G. QUARENI - Sul legame tra la cattura $K$ e l'emissione $\gamma$ del Potassio 40 (L.) . . . . .	pag. 598
PANCINI E. (vedi ALBERIGI QUARANTA A.) . . . . .	» 618
PERRIER D. (vedi THIBAUD J.) . . . . .	» 705
PIERUCCI O. (vedi MERLIN M.) . . . . .	» 528
POIANI G. (vedi BUDINI P.) . . . . .	» 732
PORRECA F. - Alcune particolarità sul comportamento degli ultrasuoni nei liquidi . . . . .	» 521
PRINZI L. (vedi BASSI P.) . . . . .	» 469
PUPPI G. (vedi CLEMENTEL E.) . . . . .	» 936
QUARENI G. (vedi CECCARELLI M.) . . . . .	» 132
QUARENI G. (vedi PAGANELLI M.) . . . . .	» 598
QUERZOLI R. (vedi AGENO M.) . . . . .	» 433
QUERZOLI R. (vedi AGENO M.) . . . . .	» 512
QUERZOLI R. (vedi MEZZETTI L.) . . . . .	» 768
RADICATI L. A. (vedi CINI M.) . . . . .	» 317
RADICATI L. A. (vedi CINI M.) . . . . .	» 543
REINER D. (vedi KIP F. A.) . . . . .	» 682
RESCIGNO L. (vedi CARRELLI A.) . . . . .	» 308
RICAMO R. - Risonanze $(n, n)$ e $(n, p)$ nel $P^{31}$ ed $S^{32}$ . . . . .	» 383
RICAMO R. - Studio del livello a 8,20 MeV del $C^{13}$ (L.) . . . . .	» 893
ROSINO L. - Caratteri fisici di alcune classi di stelle variabili . . . . .	» 54
ROSTAGNI N. (vedi CECCARELLI M.) . . . . .	» 132
ROY R. R. (vedi OLLANO Z. M. I.) . . . . .	» 77
SALVETTI C. (vedi GALLONE S.) . . . . .	» 502
SALVETTI C. (vedi GALLONE S.) . . . . .	» 960
SALVETTI C. (vedi GALLONE S.) . . . . .	» 970
SALVINI G. - Detection of Nuclear Interaction by Means of a Cloud Chamber Containing a Crystal of Sodium Jodide . . . . .	» 798
SARD R. D., M. F. CROUCH, D. R. JONES, A. M. CONFORTO and B. F. STEARNS - Neutron Production by Cosmic Ray Particles at Sea Level and Underground . . . . .	» 326
SCHEIN M. (vedi VIDALE M. L.) . . . . .	» 774
SCHERRER P. (vedi JONA F.) . . . . .	» 981
SCHÖNBERG M. - Mechanism of the loss of Energy by Collisions in a Material Medium (I) . . . . .	» 159
SCHÖNBERG M. - Sur la théorie des perturbations en mécanique quantique . . . . .	» 243
SCHÖNBERG M. - Sur la théorie des perturbations en mécanique quantique (II) - Spectres continus et mixtes . . . . .	» 403
SCHÖNBERG M. - Physical Applications of the Resolvent Operators (I) On the Mathematical Formalism of Feynman's Theory of the Positron . . . . .	» 651
SCHÖNBERG M. - On the general Theory of Damping in Quantum Mechanics . . . . .	» 817
SIGNORINI A. - Giovanni Giorgi (Necrologio) . . . . .	» 225
SIMONETTA M. e R. BONELLI - Sul calcolo del più basso livello energetico dell'Ortoelio . . . . .	» 813
STEARNS B. F. (vedi SARD R. D.) . . . . .	» 326
STOPPINI G. (vedi ALBERIGI QUARANTA A.) . . . . .	» 618
TAGLIAFERRI G. (vedi LOVATI A.) . . . . .	» 271
TAGLIAFERRI G. (vedi LOVATI A.) . . . . .	» 713



TAMBURINO S. (vedi ADDARIO M. M.) . . . . .	pag. 82
TARTAGLIONE E. - Diffrazione di raggi X da parte di soluzioni acquose di alcuni solfati . . . . .	» 977
TERRA L. (vedi LOVATI A.) . . . . .	» 713
THIBAUD J. et D. PERRIER - Luminosité à la rencontre d'ondes de choc produites par les charges creuses . . . . .	» 705
TOMASINI G. (vedi BONETTI A.) . . . . .	» 693
TOMASINI G. (vedi LEVI SETTI R.) . . . . .	» 994
VERDE M. - A further Theoretical Contribution to the Photodisintegration of $H^3$ and $He^3$ . . . . .	» 152
VIDALE M. L. and M. SCHEIN - High Energy Nuclear Interaction of Cosmic Ray Particles Close to the Top of the Atmosphere . . . . .	» 774
VINCENT A. M. (vedi MEULEMANS G.) . . . . .	341
VRKLJAN S. - Über das Schrödingersche Zittern der de Broglieschen Teilchen mit Spin 1 vom Typus des Mesons . . . . .	» 369
WATAGHIN G. - On the Quantum Theory of Fields (I) (L.) . . . . .	» 592

## INDICE ANALITICO PER MATERIA

### ACUSTICA (E ULTRASUONI)

Comportamento degli ultrasuoni nei liquidi, <i>F. Porreca</i> . . . . .	pag. 525
Distribuzione del campo ultrasonoro nei liquidi, <i>E. Grossetti</i> . . . . .	» 301
Emissione degli ultrasuoni, <i>E. Grossetti</i> . . . . .	» 441

### ASTROFISICA

Caratteri fisici di alcune classi di stelle variabili, <i>L. Rosino</i> . . . . .	» 54
---	------

### CONDUCIBILITÀ ELETTRICA

Misura di conducibilità in alta frequenza con soluzioni dotate di note- vole viscosità, <i>A. Carrelli</i> e <i>L. Rescigno</i> . . . . .	» 308
--	-------

### COSMICA (RADIAZIONE)

Absorption of Slow $\mu$ -Mesons in Nuclear Emulsions, <i>A. Bonetti</i> and <i>G.</i> <i>Tomasini</i> . . . . .	» 693
Angular Analysis of Cosmic Ray Stars, <i>M. Della Corte</i> and <i>M. Giovannozzi</i> . . . . .	» 741
Cattura <i>K</i> del mesone, <i>P. Budini</i> . . . . .	» 901
Componente nucleonica nell'atmosfera, <i>E. Clementel</i> e <i>G. Puppi</i> . . . . .	» 936
Componenti mesonica ed elettronica della radiazione cosmica nell'atmo- sfera, <i>P. Caldirola</i> e <i>P. Gulmanelli</i> . . . . .	» 229
Detection of Nuclear Interaction by Means of a Cloud Chamber con- taining a Crystal of Sodium Iodide, <i>G. Salvini</i> . . . . .	» 798
Disintegrazioni nucleari a grande altezza, <i>M. M. Addario</i> e <i>S. Tamburino</i> . . . . .	» 82
Distribuzione angolare dei rami delle stelle prodotte dalla radiazione cosmica nelle emulsioni fotografiche, <i>A. Manfredini</i> . . . . .	» 195
Eccesso positivo dei mesoni a 2000 metri, <i>P. Bassi</i> , <i>I. Filosofo</i> , <i>C.</i> <i>Manduchi</i> e <i>L. Prinzi</i> . . . . .	» 469

Effetto di latitudine sulla distribuzione dei mesoni nell'atmosfera (L.), <i>P. Caldirola, R. Fieschi e P. Gulmanelli</i> . . . . .	pag. 508
Effetto di transizione delle stelle di disintegrazione in lastre nucleari sotto piccoli spessori, <i>G. Belliboni, L. Fabbrichesi, L. De Marco e M. Merlin</i> . . . . .	» 374
Effetto orario sulla componente penetrante della radiazione cosmica (L.), <i>P. Budini e G. Poiani</i> . . . . .	» 732
Fotoni negli sciami estesi dell'atmosfera (L.), <i>P. Bassi, A. M. Bianchi e C. Manduchi</i> . . . . .	» 735
Generazione dei mesoni ed effetto di latitudine, <i>M. Ferretti Sforzini</i> . . . . .	» 909
High Energy Nuclear Interaction of Cosmic Ray Particles Close to the Top of the Atmosphere, <i>M. L. Vidale and M. Schein</i> . . . . .	» 774
Interaction Mean Free Path of the Particles Emitted in Cosmic Ray Nuclear Explosions, <i>A. Lovati, A. Mura, C. Succi and G. Tagliaferri</i> . . . . .	» 271
Mesoni associati ai grandi sciami, <i>S. Fubini</i> . . . . .	» 843
$\mu$ -Meson Tracks from $\pi$ -Meson Decays (L.), <i>W. F. Fry</i> . . . . .	» 590
Neutron Production by Cosmic-Ray Particles at Sea Level and Under- ground, <i>R. D. Sard, M. F. Crouch, D. R. Jones, A. M. Conforto and B. F. Stearns</i> . . . . .	» 326
On the Decay of $\mu$ -Mesons, <i>R. Levi Setti and G. Tomasini</i> . . . . .	» 994
Radiazione generante stelle a grande altezza (L.), <i>M. M. Addario In- dovina</i> . . . . .	» 729
Sciami estesi dei raggi cosmici, <i>C. Milone</i> . . . . .	» 643
Sparpagliamento angolare degli sciami sotto materiale pesante, <i>S. Fran- chetti e M. Giovannozzi</i> . . . . .	» 312
Spettro di densità degli sciami estesi dell'aria, <i>P. Buidni</i> . . . . .	» 446
Statistica dei risultati di misura eseguiti con contatori di Geiger, <i>L. Mez- zetti e R. Querzoli</i> . . . . .	» 768
Stelle a due rami in emulsioni nucleari, <i>M. Merlin e O. Pierucci</i> . . . . .	» 528
Stelle d'evaporazione generate in lamine metalliche (L.), <i>R. Levi Setti e M. Merlin</i> . . . . .	» 504
Struttura delle tracce generate da particelle ionizzanti di alta energia (errata corrige), <i>P. Budini</i> . . . . .	» 359
Su un secondo, terzo e quarto massimo osservati nella curva di transi- zione di Rossi, <i>L. Allegretti e M. Abd El-Wahab Khalil</i> (L.) . . . . .	» 1011
Transition Effect of Extensive Air Showers, <i>D. D. Millar</i> . . . . .	» 279
Variazione diurna degli sciami estesi di grande densità a 300 m s.l.m. (L.), <i>C. Ballario, B. Brunelli, A. De Marco e G. Martelli</i> . . . . .	» 587
V Particle (L.), <i>C. B. A. Mc Cusker and D. D. Millar</i> . . . . .	» 289

# CRISTALLI

Costanti elastiche del ghiaccio, <i>F. Jona e P. Scherrer</i> . . . . .	» 981
Oscillazioni esterne e calore specifico della calcite, <i>L. Giulotto e A. Loinger</i> . . . . .	» 475
Scintillazioni nei cristalli organici (L.), <i>M. Ageno e R. Querzoli</i> . . . . .	» 512

# DETONAZIONE DI ESPLOSIVI

Luminosité à la rencontre d'ondes de choc produites par les charges creuses, <i>J. Thibaud et D. Perrier</i> . . . . .	» 705
---	-------

## MAGNETISMO (FERROMAGNETISMO, PARAMAGNETISMO, ECC.)

Effetto Faraday di sostanze paramagnetiche nella regione delle microonde, <i>A. Gozzini</i> . . . . .	pag. 928
Magnetizzazione spontanea e punto di Curie di lamine magnetiche di piccolo spessore (L.), <i>A. Drigo</i> . . . . .	» 498
Misure di ampiezza di segnali nucleari (L.), <i>G. Chiarotti e L. Giulotto</i> . . . . .	» 595
Risonanza paramagnetica in alcuni allumi di cromo a varie temperature, <i>A. F. Kip, C. S. Davis, L. Jennings, D. Reines e R. Malvano</i> . . . . .	» 683

## MESONE

Annichilamento protone-antiprotone con emissione di mesoni vettoriali neutri e carichi, <i>R. S. Liotta</i> . . . . .	» 857
Cattura <i>K</i> del mesone, <i>P. Budini</i> . . . . .	» 901
Double Scattering of Mesons by Nucleons, <i>M. Cini and L. A. Radicati</i> . . . . .	» 542
Fotoproduzione di mesoni nel Deuterio, <i>G. Morpurgo</i> . . . . .	» 552
Influence of the Particle Structure in the Møller Scattering of $\mu$ -Mesons on Protons, <i>E. Corinaldesi</i> . . . . .	» 62
Scattering di mesoni da parte di nucleoni, <i>M. Cini e L. A. Radicati</i> . . . . .	» 317

## METODI ED APPARATI

Accoppiamento delle «scale di due» (N. T.), <i>R. Ascoli</i> . . . . .	» 584
Analisi spettrografica quantitativa (N. T.), <i>C. Bersano</i> . . . . .	» 577
Apparat zum Absuchen und Ausmessen teilchenempfindlicher Platten (N. T.), <i>O. Kolb</i> . . . . .	» 487
Camera di Wilson di grandi dimensioni per ricerche sulla radiazione cosmica (N. T.), <i>A. Lovati, A. Mura, G. Tagliaferri e L. Terra</i> . . . . .	» 713
Contatori a radiazione di Cerenkov (L.), <i>P. Bassi</i> . . . . .	» 807
Cylindrical Emulsions (N. T.), <i>A. Bonetti and G. P. S. Occhialini</i> . . . . .	» 725
Discriminazione di particelle fortemente ionizzanti in lastre nucleari (N. T.), <i>G. Belliboni e M. Merlin</i> . . . . .	» 349
Dispositivo per il controllo automatico della pressione in un impianto ad alto vuoto (N. T.), <i>M. Chiozzotto</i> . . . . .	» 345
Eliminazione della contrazione nelle emulsioni nucleari (L.), <i>G. Mignone</i> . . . . .	» 968
Étalon de brillance (corps noir) à température ajustable (N. T.), <i>G.-A. Boutry et L. Le Blan</i> . . . . .	» 207
Impianto acceleratore per ioni positivi (L.), <i>M. Ageno, M. Chiozzotto e R. Querzoli</i> . . . . .	» 433
Methods of Measurement of Scattering in the Photographic Plate, <i>R. Levi Setti</i> . . . . .	» 96
Rappresentazione nomografica dell'urto tra due particelle di dimensioni atomiche, <i>F. Mariani</i> . . . . .	» 297
Visualizzazione delle onde di viscosità nei liquidi (L.), <i>A. Carrelli e G. Branca</i> . . . . .	» 889
Wire Method of Loading Nuclear Emulsions, <i>G. Meulemans, G. P. S. Occhialini and A. M. Vincent</i> . . . . .	» 341

## MOLECOLE

Diffrazione di raggi X da parte di soluzioni acquose di alcuni solfati, <i>E. Tartaglione</i> . . . . .	» 977
---	-------



Molecular Orbitals in Conjugated Rings and Chains, <i>F. G. Fumi</i> . . .	pag. 1
Idem (errata corrige) . . . . .	» 359

## NUCLEI (E FISICA NUCLEARE)

Annicihilamento Protone-Antiprotone con emissione di mesoni vettoriali neutri e carichi, <i>R. S. Liotta</i> . . . . .	» 857
Cattura $K$ e emissione $\gamma$ del Potassio 40 (L.), <i>M. Paganelli</i> e <i>G. Quareni</i> . . . . .	» 598
Fattore di utilizzazione termica in simmetria cilindrica (L.), <i>L. Orsoni</i> . . . . .	» 434
Livello a 8,20 MeV del $C^{13}$ (L.), <i>R. Ricamo</i> . . . . .	» 893
Misura di ampiezza di segnali nucleari (L.), <i>G. Chiarotti</i> e <i>L. Giulotto</i> . . . . .	» 595
Modello nucleare asimmetrico, <i>S. Gallone</i> e <i>C. Salvetti</i> . . . . .	» 970
Momenti magnetici dei nuclei speculari (L.), <i>S. Gallone</i> e <i>C. Salvetti</i> . . . . .	» 502
Neutrons and Protons from $Ne^{22}$ by the Bombardment of $\alpha$ -Particles, <i>Z. M. I. Ollano</i> and <i>R. R. Roy</i> . . . . .	» 77
Photodisintegration of $H^3$ and $He^3$ , <i>M. Verde</i> . . . . .	» 152
Photodisintegration of the $\alpha$ -Particle (I), <i>A. Gamba</i> . . . . .	» 605
Risonanze ( $n, n$ ) e ( $n, p$ ) nel $P^{31}$ e $S^{32}$ , <i>R. Ricamo</i> . . . . .	» 383
Scattering classico di Rutherford (L.), <i>L. Castoldi</i> . . . . .	» 491
Scattering of Neutrons by Deuterons, <i>F. Clementel</i> . . . . .	» 185
Sorgenti di neutroni variabili nel tempo in mezzi moltiplicanti (I), <i>S. Gallone</i> , <i>L. Orsoni</i> e <i>C. Salvetti</i> . . . . .	» 960
Spettro di energia delle particelle emesse nella reazione ${}^6_3Li(n, \alpha){}_4^3He$ , <i>V. Facchini</i> , <i>E. Gatti</i> e <i>E. Germagnoli</i> . . . . .	» 145
Sullo stato di polarizzazione dei prodotti della reazione $D + D$ , <i>M. Cini</i> (L.) . . . . .	» 1007

## ONDE ELETTROMAGNETICHE

Costante dielettrica nei gas nella regione delle microonde, <i>A. Gozzini</i> . . . . .	» 361
Effetto Faraday di sostanze paramagnetiche nella regione delle microonde, <i>A. Gozzini</i> . . . . .	» 928
Mezzi dispersivi che non presentano l'effetto Fizeau-Fresnel, <i>N. Carrara</i> . . . . .	» 569
Reticoli piani per microonde, <i>L. Grillini</i> . . . . .	» 952
Teoria delle linee di ritardo « compensate », <i>R. Ascoli</i> . . . . .	» 914

## OTTICA

Complementi alla teoria del microscopio in contrasto di fase, <i>L. Berti</i> . . . . .	» 26
---	------

## QUANTISTICA (TEORIE GENERALI)

Cambiamento di variabile nella teoria delle distribuzioni, <i>S. Albertoni</i> e <i>M. Cugiani</i> . . . . .	» 874
Charge Fluctuations in Quantum Electrodynamics (L.), <i>E. Corinaldesi</i> . . . . .	» 494
Correzioni di relatività e di spin per una particella in campo centrale (L.), <i>A. Bernasconi</i> e <i>P. Caldirola</i> . . . . .	» 71
Diagonalizzazione della Hamiltoniana nella teoria dei campi d'onda e teoria dei sistemi chiusi, <i>B. Ferretti</i> . . . . .	» 108
Genäherte Berechnung der Eigenwerte einer Schrödinger-Gleichung, <i>H. S. Maehly</i> . . . . .	» 466

Loss of Energy by Collisions in a Material Medium (I), <i>M. Schönberg</i>	pag. 159
Perturbations en Mécanique Quantique, <i>M. Schönberg</i>	» 243
Perturbations en Mécanique Quantique (II). Spectres continus et Mixtes, <i>M. Schönberg</i>	» 403
Physical Applications of the Resolvent Operators (I). On the Mathematical Formalism of Feynman's Theory of the Positron, <i>M. Schönberg</i>	» 651
Quantum Theory of Fields (I) (L.), <i>G. Wataghin</i>	» 592
Universal Fermi-type Interaction, <i>E. R. Caianiello</i>	» 534
Universal Fermi-type Interaction (II), <i>E. R. Caianiello</i>	» 749
Zittern der de Broglieschen Teilchen mit dem Spin 1 vom Typus des Mesons, <i>S. Vrkljan</i>	» 369

#### RADIOATTIVITÀ

Radioattività del Potassio, <i>M. Ceccarelli, G. Quarenì e A. Rostagni</i>	» 132
Radioattività di lave vesuviane, <i>F. Bachelet, M. Ferretti Sforzini e F. Ippolito</i>	» 851

#### SCARICHE NEI GAS

Recent Advances in Discharge Physics, <i>A. von Engel</i>	» 42
Velocità di migrazione degli elettroni in campo elettrico in Argon (L.), <i>L. Colli e V. Facchini</i>	» 891
Velocità di migrazione degli elettroni nelle miscele di Argon e Alcool, <i>A. Alberigi Quaranta, L. Mezzetti, E. Pancini e G. Stoppini</i>	» 618

#### SPETTROSCOPIA

Calcolo del più basso livello energetico dell'Ortoelio, <i>M. Simonetta e R. Bonelli</i>	» 813
Regolarità nei dati spettroscopici di molecole biatomiche formate con atomi del 4° e 6° gruppo (L.), <i>G. Lovera</i>	» 1014

---

Fine del Volume VIII, Serie IX, 1951

---

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA